PHẦN ĐẠI SỐ

1. ***Điều kiện để căn thức có nghĩa***

$\sqrt{A}$ Có nghĩa khi A ≥ 0

2. ***Các công thức biến đổi căn thức***

1) $\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A & , A \geq 0 \\ -A & , A < 0 \end{cases}$

2) $\sqrt{AB} = \sqrt{A}.\sqrt{B} \quad (A \geq 0; B \geq 0)$

3) $\sqrt{\dfrac{A}{B}} = \dfrac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} \quad (A \geq 0; B > 0)$

4) $\sqrt{A^2B} = |A|\sqrt{B} \quad (B \geq 0)$

5) $A\sqrt{B} = \sqrt{A^2B} \quad (A \geq 0; B \geq 0)$

6) $A\sqrt{B} = -\sqrt{A^2B} \quad (A < 0; B \geq 0)$

7) $\sqrt{\dfrac{A}{B}} = \dfrac{1}{|B|}\sqrt{AB} \quad (AB \geq 0; B \neq 0)$

8) $\dfrac{A}{\sqrt{B}} = \dfrac{A\sqrt{B}}{B} \quad (B > 0)$

9) $\dfrac{C}{\sqrt{A} \pm B} = \dfrac{C(\sqrt{A} \mp B)}{A - B^2} \quad (A \geq 0; A \neq B^2)$

$\dfrac{C}{\sqrt{A} \pm \sqrt{B}} = \dfrac{C(\sqrt{A} \mp \sqrt{B})}{A - B^2} \quad (A \geq 0; B \geq 0; A \neq B\ )$

Phần 2: Một số ví dụ và bài tập:

Ví dụ 1: Rút gọn biểu thức sau:

$$A = \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{7 - \sqrt{24}} + 1} - \frac{1}{\sqrt{7 + \sqrt{24}} - 1}$$

$$C = (2 + \frac{3 + \sqrt{3}}{\sqrt{3} + 1}).(2 + \frac{3 - \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}})$$

$$D = \sqrt{15 - 6.\sqrt{6}} + \sqrt{33 - 12.\sqrt{6}}$$

$$E = \sqrt{13 + 30.\sqrt{2 + \sqrt{9 + 4.\sqrt{2}}}}$$

$$F = \frac{(5 + 2.\sqrt{6}).(49 - 20.\sqrt{6}).\sqrt{5 - 2.\sqrt{6}}}{9.\sqrt{3} - 11.\sqrt{2}}$$

Ví dụ 2: Cho M = $\dfrac{-\sqrt{a} - a + 6}{3 + \sqrt{a}}$

a) Rút gọn M

b) Tìm a để $|M| \geq 1$

c) Tìm giá trị lớn nhất của M

Giải

a) ĐK: a ≥ 0

M = $\frac{-a-\sqrt{a}+6}{\sqrt{a}+3}=\frac{(\sqrt{a}+3)(2-\sqrt{a})}{\sqrt{a}+3}=2-\sqrt{a}$

Vậy với a $\geq$ 0 thì M = 2 - $\sqrt{a}$

b) Để $|M|\geq 1\Leftrightarrow |2-\sqrt{a}|\geq 1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2-\sqrt{a}\geq 1\\ \sqrt{a}-2\geq 1\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{a}\leq 1\\ \sqrt{a}\geq 3\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a\leq 1\\ a\geq 9\end{array}\right.$

Vậy $|M|\geq 1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}0\leq a\leq 1\\ a\geq 9\end{array}\right.$

c) M = 2 - $\sqrt{a}$ $\leq$ 2 Vậy *Max* M = 2 $\Leftrightarrow a=0$

Ví dụ 3: Chứng minh đẳng thức:

$a) 2\sqrt{2}.(\sqrt{3}-2)+(1+2\sqrt{2})^2=9$

$b) (4+\sqrt{15}).(\sqrt{10}-\sqrt{6}).\sqrt{4-\sqrt{15}}=2$

$c) \sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{6}$

$d) \left[(2+\sqrt{3}).(2-\sqrt{3})\right]:(\sqrt{5}-2)=(\sqrt{5}+2)$

Bài tập vận dụng

Bài 1*:* Rút gọn biểu thức

P = $\frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{10}+\sqrt{3+\sqrt{5}}}-\frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{10}+\sqrt{3-\sqrt{5}}}$

Bài 2*:* Rút gọn biểu thức

a) A = $\sqrt{4+\sqrt{7}}-\sqrt{4-\sqrt{7}}$

b) B = $\sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+\sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$

c) C = $\sqrt{4+\sqrt{15}}+\sqrt{4-\sqrt{15}}-2\sqrt{3-\sqrt{5}}$

Ví dụ 4: Cho biểu thức

M = $\left(\frac{a-\sqrt{25a}}{a-25}-1\right):\left(\frac{25-a}{a+3\sqrt{a}-10}-\frac{\sqrt{a}-5}{2-\sqrt{a}}-\frac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}+5}\right)$

a) Rút gọn M

b) Tìm giá trị của a để M < 1

c) Tìm giá trị lớn nhất của M

Giải

a) ĐK: a $\geq$ 0; a $\neq$ 4; a $\neq$ 25

M = $\left[\frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}-5)}{(\sqrt{a}-5)(\sqrt{a}+5)}-1\right]:\left[\frac{25-a}{(\sqrt{a}+5)(\sqrt{a}-2)}+\frac{\sqrt{a}-5}{\sqrt{a}-2}-\frac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}+5}\right]$

M = $\frac{-5}{\sqrt{a}+5}:\left[\frac{25-a+a-25-a+4}{(\sqrt{a}+5)(\sqrt{a}-2)}\right]$

M = $\frac{-5}{\sqrt{a}+5}.\left(\frac{(\sqrt{a}+5)(\sqrt{a}-2)}{4-a}\right)=\frac{5}{\sqrt{a}+2}$

Vậy với a ≥ 0; a ≠ 4; a ≠ 25 thì M = $\frac{}{\sqrt{a}+2}$

b) Để M < 1 $\Leftrightarrow \frac{5}{\sqrt{a}+2} < 1 \Leftrightarrow \frac{5}{\sqrt{a}+2} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{5-\sqrt{a}-2}{\sqrt{a}+2} < 0$

$\Leftrightarrow 3-\sqrt{a} < 0$ (Vì $\sqrt{a}+2>0$)

$\Leftrightarrow \sqrt{a} > 3 \Leftrightarrow a > 9$

Vậy với a > 9; a ≠ 25 Thì M < 1

c) Để M đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow \frac{5}{\sqrt{a}+2}$ lớn nhất $\Leftrightarrow \sqrt{a}+2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow \sqrt{a} = 0$

Vậy với a = 0 thì M đạt giá trị lớn nhất

Bài tập vận dụng

***Bài 1**:* Cho biểu thức

$$P = \frac{15\sqrt{x}-11}{x+2\sqrt{x}-3} + \frac{3\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}$$

a) Rút gọn P

b)Tìm các giá trị của x sao cho P = $\frac{1}{2}$

c) Chứng minh P ≤ $\frac{2}{3}$

***Bài 2**:* Cho biểu thức

$$P = \frac{3a+\sqrt{9a}-3}{a+\sqrt{a}-2} - \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}+2} + \frac{\sqrt{a}-2}{1-\sqrt{a}}$$

a) Rút gọn P.

b) Tìm các giá trị nguyên của a để P nguyên.

***Bài 3**:* Cho biểu thức

$$P=\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1} - \frac{1}{a-\sqrt{a}}\right):\left(\frac{1}{\sqrt{a}+1} + \frac{2}{a-1}\right)$$

a) Rút gọn P.

b) Tính giá trị P khi a = 3 + 2$\sqrt{2}$

c) T ìm các giá trị của a sao cho P < 0.

***Bài 4**:* Cho biểu thức

$$P = \left(\frac{4\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}} + \frac{8x}{4-x}\right):\left(\frac{\sqrt{x}-1}{x-2\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}}\right)$$

a) Rút gọn P.

b) Tính x để P = -1

c)T ìm m để với mọi giá trị x >9 ta có m($\sqrt{x}$ - 3)P > x + 1.

***Bài 5**:* Cho biểu thức

$$P = \left(\sqrt{x} + \frac{y+\sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right):\left(\frac{x}{\sqrt{xy}+y} + \frac{y}{\sqrt{xy}+x} - \frac{x+y}{\sqrt{xy}}\right)$$

a) Tìm x, y để P có nghĩa.

b) Rút gọn P.

c) Tìm giá trị của P với x = 3, y = 4 - 2$\sqrt{3}$

Bài 6: Cho biểu thức : $A = \left(\dfrac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} - \dfrac{x\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}}\right) : \dfrac{2(x-2\sqrt{x}+1)}{x-1}$

a) Rút gọn A.

b) Tìm x có giá trị nguyên để A nhận giá trị nguyên.

Bài 7: Cho biểu thức

$$P = \frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}+1}{x-1}$$

a) Rút gọn P

b) Chứng minh: P < $\frac{1}{3}$ với x $\geq$ 0 với x $\neq$ 1.

Bài 8: Cho biểu thức

$$P = \left(\frac{\sqrt{x}-2}{x-1} - \frac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1}\right).\left(\frac{1-x}{\sqrt{2}}\right)^2$$

a) Rút gọn P.

b) Chứng minh rằng nếu 0 < x < 1 thì P > 0.

c) Tìm GTLN của P.

Bài 9*:* Chứng minh giá trị của biểu thức

$$P = \frac{2x}{x+3\sqrt{x}+2} + \frac{5\sqrt{x}+1}{x+4\sqrt{x}+3} + \frac{\sqrt{x}+10}{x+5\sqrt{x}+6}$$

Không phụ thuộc vào biến số x.

Bài 10: Cho biểu thức

$$A = \left(\frac{x\sqrt{x}+1}{x-1} - \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}\right) : \left(\sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\right)$$ với x>0 và x≠1

a) Rút gọn A

b) Tìm giá trị của x để A = 3

Bài 11: Cho biểu thức

$$M = \left[\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{1-\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{1+\sqrt{ab}}\right] : \left[1 + \frac{a+b+2ab}{1-ab}\right]$$

a) Rút gọn M

b) Tính giá trị của M với a = $\frac{2}{2-\sqrt{3}}$

c) Tìm giá trị lớn nhất của M

Bài 12*:* Cho biểu thức

$$P = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{2x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{2(x-1)}{\sqrt{x} - 1}$$

a) Rút gọn P.

b) Tìm GTNN của P

c) Tìm x để biểu thức Q = $\frac{2\sqrt{x}}{P}$ nhận giá trị là số nguyên.

Bài 13: Cho biểu thức

$$P = \left(\frac{2x\sqrt{x} + x - \sqrt{x}}{x\sqrt{x} - 1} - \frac{x + \sqrt{x}}{x - 1} \right) \cdot \frac{x - 1}{2x + \sqrt{x} - 1} + \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x} - 1}$$

a) Tìm x để P có nghĩa

b) Rút gọn P.

c) Với giá trị nào của x thì biểu thức P đạt GTNN và tìm GTNN đó.

Bài14:Chobiểuthức

$$P = \left(\frac{x - 1}{x + 3\sqrt{x} - 4} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} \right) : \frac{x + 2\sqrt{x} + 1}{x - 1} + 1$$

a) Rút gọn P

b) Tìm giá trị lớn nhất của P

Bài 15: Cho biểu thức

$$A = \left(\frac{1}{\sqrt{x-1}} + \frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)^2 . \frac{x^2 - 1}{2} - \sqrt{1 - x^2}$$

a) Tìm điều kiện của x để A có nghĩa

b) Rút gọn biểu thức A

c) Giải phương trình theo x khi A = -2

Bài 16: Cho biểu thức

$$A = \left(\frac{2\sqrt{x} + x}{x\sqrt{x} - 1} - \frac{1}{\sqrt{x} - 1}\right) : \left(\frac{\sqrt{x} + 2}{x + \sqrt{x} + 1} \right)$$

a) Rút gọn A

b) Tính giá trị của $\sqrt{A}$ khi $x = 4 + 2\sqrt{3}$

Bài 17: Cho biểu thức

$$A = \frac{\sqrt{x} + 1}{x\sqrt{x} + x + \sqrt{x}} : \frac{1}{x^2 - \sqrt{x}}$$

a) Rút gọn biểu thức A

b) Coi A là hàm số của biến x, vẽ đồ thị hàm số A

Bài 18: Cho biểu thức

$$A = \left(\frac{1}{1 - \sqrt{x}} + \frac{1}{1 + \sqrt{x}} \right) : \left(\frac{1}{1 - \sqrt{x}} - \frac{1}{1 + \sqrt{x}} \right) + \frac{1}{1 - \sqrt{x}}$$

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tính giá trị của A khi x = $7 + 4\sqrt{3}$

c) Với giá trị nào của x thì A đạt giá trị nhỏ nhất

Bài 19: Cho biểu thức

M = $\left(\dfrac{a\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}}-\dfrac{a\sqrt{a}+1}{a+\sqrt{a}}\right):\dfrac{a+2}{a-2}$

a) Với giá trị nào của a thì M xác định

b) Rút gọn M

c) Với giá trị nguyên nào của a thì M có giá trị nguyên

Bài 20: Cho biểu thức

P = $\dfrac{1+\sqrt{1-a}}{1-a+\sqrt{1-a}}+\dfrac{1-\sqrt{1+a}}{1+a-\sqrt{1+a}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+a}}$

a) Rút gọn biểu thức P

b) Chứng minh rằng biểu thức P luôn dương với mọi a

Bài 21:Cho biểu thức

A = $\left(\dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}-\dfrac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}+4\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{a}-\dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)$

a) Rút gọn A.

b) Tính A với a=(4 + $\sqrt{15}$)($\sqrt{10}$ - $\sqrt{6}$) $\sqrt{4-\sqrt{15}}$

Bài 22: Cho biểu thức

P = $\dfrac{\sqrt{a}+3}{\sqrt{a}-2}-\dfrac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+2}+\dfrac{4\sqrt{a}-4}{4-a}$ $(a>0\,;\,a\neq 4)$

a) Rút gọn biểu thức P

b) Tính giá trị của P khi A = 9

Bài 23: Cho biểu thức

P = $\dfrac{1+\sqrt{1-x}}{1-x+\sqrt{1-x}}+\dfrac{1-\sqrt{1+x}}{1+x+\sqrt{1+x}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$

a) Rút gọn P.

b) So sánh P với $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Bài 24: Cho biểu thức

P = $\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}-\dfrac{3}{x\sqrt{x}+1}+\dfrac{2}{x-\sqrt{x}+1}$

a) Rút gọn P.

b) Chứng minh: $0 \le P \le 1$.

Bài 25: Cho biểu thức

P = $\dfrac{2\sqrt{a}-9}{a-5\sqrt{a}+6}-\dfrac{\sqrt{a}+3}{\sqrt{a}-2}-\dfrac{2\sqrt{a}+1}{3-\sqrt{a}}$

a) Rút gọn P.

b) a = ? thì P < 1

c) Với giá trị nguyên nào của a thì P nguyên.

* *
*

Chủ đề 2: HỆ PHƯƠNG TRÌNH

I. Hệ phương trình bậc nhất một ẩn:

Phần I : Kiến thức cần nhớ

1 Dạng tổng quát : $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$

2 Số các nghiệm của hệ:

+ Nếu $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'} \Leftrightarrow$ Hệ có nghiệm duy nhất

+ Nếu $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'} \Leftrightarrow$ Hệ vô nghiệm

+ Nếu $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \Leftrightarrow$ Hệ có vô số nghiệm

1 Các phương pháp giải hệ phương trình:

1. Phương pháp thế:

- Từ một phương trình của hệ biểu thị một ẩn (chẳng hạn ẩn x) theo ẩn kia
- Thay biểu thức của x vào phương trình còn lại để tìm y
- Thay y vừa tìm được vào biểu thức của x để tìm x

KL : Nghiệm của hệ là cặp giá trị (x; y) vừa tìm được

Ví dụ 1 : Giải các hệ phương trình sau :

a) $\begin{cases} 2x+3y=6 & (1) \\ x+y=3 & (2) \end{cases}$

Từ phương trình (2) ta có: x = 3 – y (*)

Thay x = 3 – y vào phương trình (1) ta được :

2(3 - y) + 3y = 6

6 – 2y + 3y = 6 $\Rightarrow$ y = 0

Thay y = 0 vào phương trình (*) ta được : x = 3

Vậy nghiệm của hệ là: $\begin{cases} x=3 \\ y=0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x+y=5 & (1) \\ 4x-5y=3 & (2) \end{cases}$

Từ phương trình (1) ta có : y = 5 – 2x (*)

Thay y = 5 – 2x vào phương trình (2) ta được :

4x – 5 (5 – 2x) = 3

4x -25 + 10x = 3

14x = 28 $\Rightarrow x=2$

Thay x = 2 vào (*) ta được : y = 5 – 2.2 $\Rightarrow y=1$

Vậy nghiệm của hệ là : $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

2. Phương pháp cộng :

- Biến đổi các hệ số của cùng một ẩn sao cho có giá trị tuyệt đối bằng nhau
- Cộng hoặc trừ từng vế của hệ để khử đi một ẩn
- Giải phương trình tìm ẩn chưa khử
- Thay giá trị vào một phương trình của hệ để tìm ẩn còn lại

KL : nghiệm của hệ là cặp giá trị (x; y) vừa tìm được

Ví dụ 2: Giải các hệ phương trình sau :

a) $\begin{cases} x+2y=14 & (1) \\ -x+3y=-9 & (2) \end{cases}$

Cộng từng vế của hệ ta được : 5y = 5 $\Rightarrow y=1$

Thay y = 1 vào phương trình (1) ta được :

x + 2.1 = 14 $\Rightarrow x=12$

Vậy nghiệm của hệ là (x; y) = (12; 1)

b) $\begin{cases} -3x+4y=11 & (1) \\ 5x+4y=3 & (2) \end{cases}$

Trừ từng vế của hệ ta được : -8x = 8 $\Rightarrow x=-1$

Thay x = -1 vào phương trình (2) ta được:

5.(-1) + 4y = 3 ⇔ 4y = 8 $\Rightarrow y=2$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là : $\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$

3. Chú ý :

Với hệ phương trình $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$

+Nếu a = a’ hoặc b = b’ ta nên sử dụng phép cộng từng vế

+Nếu a = -a’ hoặc b = -b’ ta nên sử dụng phép trừ

+Nếu các hệ số a; a’; b; b’ bằng 1 hoặc -1 thì ta nên dùng phương pháp thế

+ Nếu các hệ số a; a’; b; b’ khác ± 1 và không có giá trị tuyệt đối bằng nhau thì ta đi tìm BCNN (a;a’) hoặc BCNN (b; b’)

.Chú ý 2 : Với bài tập dạng tìm điều kiện của tham số để nghiệm của hệ thoả mãn một điều kiện α nào đó ta làm như sau:

+ Coi tham số như số đã biết

+ Giải hệ phương trình tìm nghiệm (x; y).Nghiệm (x; y) phụ thuộc vào tham số

+ Giải các phương trình (Bất phương trình) của biểu thức chứa tham số

Ví dụ 3: Giải các hệ phương trình sau :

a) $\begin{cases} 4x+3y=-1 & (1) \\ 3x-2y=12 & (2) \end{cases}$

Giải

Nhân phương trình (1) với 2, nhân phương trình (2) với 3 ta được : $\begin{cases} 8x+6y=-2 \\ 9x-6y=36 \end{cases}$

Cộng từng vế của hệ ta được : 17x = 34 $\Rightarrow x=2$

Thay x = 2 vào phương trình (1) ta được :

4.2 + 3y = -1

$\Rightarrow 3y=-9 \Rightarrow y=-3$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là : $\begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x - 4y = -6 & (1) \\ 3x - 2y = -4 & (2) \end{cases}$

Nhân phương trình (2) với 2 ta được :

$$\begin{cases} 5x - 4y = -6 \\ 6x - 4y = -8 \end{cases}$$

Trừ từng vế của hệ ta được : -x = 2 $\Rightarrow x = -2$

Thay x = -2 vào phương trình (1) ta được:

5.(-2) – 4y = -6

- 4y = 4 $\Rightarrow y = -1$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là (x; y) = (-2; -1)

Ví dụ4: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - 2y = 0 & (1) \\ mx - 3y = 2 & (2) \end{cases}$$

a) Giải hệ với m = -2
b) Tìm m để hệ có nghiệm dương

Giải

a) Với m = -2 ta có hệ : $\begin{cases} x - 2y = 0 & (1) \\ -2x - 3y = 2 & (3) \end{cases}$

Từ (1) ta có : x = 2y (*) thay vào (3) ta được:

-2.2y – 3y = 2 $\Rightarrow y = -\dfrac{2}{7}$ thay vào (*) $\Rightarrow x = -\dfrac{4}{7}$

Vậy nghiệm của hệ là : $\begin{cases} x = -\dfrac{4}{7} \\ y = -\dfrac{2}{7} \end{cases}$

b)Từ (1) ta có : x = 2y (*) thay vào phương trình (2) ta được:

m.2y – 3y = 2 $\Leftrightarrow y(2m-3) = 2 \Rightarrow y = \dfrac{2}{2m-3}$

Thay vào (*) ta được : $x = \dfrac{4}{2m-3}$

Để hệ có nghiệm $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4}{2m-3} > 0 \\ \dfrac{2}{2m-3} > 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ 2m – 3 > 0

$\Rightarrow$ m > $\dfrac{3}{2}$

Vậy với m > $\dfrac{3}{2}$ thì hệ phương trình có nghiệm dương

Ví dụ 5: Cho hệ phơng trình:

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ mx + y = m \end{cases}$$

Tìm giá trị của m để:

a) Hệ pt có nghiệm x=2; y= -1

b) Hệ pt có một nghiệm duy nhất

c) Hệ pt có vô số nghiệm

d) Hệ pt vô nghiệm

Giải

a) Thay x và y bằng các giá trị tơng ứng đã cho vào hệ pt

b) Hệ pt có một nghiệm duy nhất khi: $\frac{1}{m} \neq \frac{-1}{1} \Leftrightarrow m \neq -1$

c) Hệ pt có vô số nghiệm khi : $\frac{1}{m} = \frac{-1}{1} = \frac{3}{m} \Leftrightarrow$ Không có giá trị nào của m để hệ pt có vô số nghiệm

d) Hệ pt vô nghiệm khi : $\frac{1}{m} = \frac{-1}{1} \neq \frac{3}{m} \Leftrightarrow m = -1$

Ví dụ 3: Cho hệ phơng trình $\begin{cases}(m-1)x + y = 3m-4 \\ x + (m-1)y = m\end{cases}$

a) Giải hệ pt với m =-1

b) Tìm giá trị của m để hệ pt có nghiệm duy nhất thỏa mãn x + y = 3

Giải

a) Thay m = -1 vào hệ pt và giải

b) Coi m nh một số đã biết, giải hệ pt tìm nghiệm x và y theo tham số m

Với $m \neq 0; m \neq 2$ hệ pt có nghiệm $(x = \frac{3m-2}{m}; y = \frac{m-2}{m})$

Theo đề bài có x + y = 3 $\Rightarrow \frac{4m-4}{m} = 3 \Leftrightarrow m = 4$ (Thỏa mãn đk)

Vậy với m = 4 thì hệ pt có nghiệm duy nhất thỏa mã đk x+ y = 3

Ví dụ 6: Cho hệ pt $\begin{cases}mx - y = 2 \\ 3x + my = 5 (m \neq 0)\end{cases}$

a) Giải hệ pt với m = $\sqrt{2}$

b) Tìm m để hệ pt có một nghiệm duy nhất thỏa mãn đk : x + y < 1

Giải

a) Thay giá trị của m vào hệ pt và giải

b) Coi m nh một số đã biết, giải hệ pt trình tìm nghiệm theo m

Hệ pt có nghiệm: $(x = \frac{2m+5}{m^2+3}; y = \frac{5m-6}{m^3+3})$

$$\Leftrightarrow m^2 - 7m + 4 > 0 \Leftrightarrow (m - \frac{7}{2})^2 > \frac{33}{4}$$

Theo đề bài có : x + y < 1 $\Leftrightarrow m > \frac{7+\sqrt{33}}{2}; m < \frac{7-\sqrt{33}}{2}$

Phần II : Một số bài tập

Bài 1: Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases}2x + 3y = 8 \\ 3x - y = 1\end{cases}$ b) $\begin{cases}7x - 5y = 17 \\ 6x + 5y = -4\end{cases}$ c) $\begin{cases}12x + 7y = -5 \\ 9x - 5y = -14\end{cases}$

Bài 2: Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x+3y=a \\ 5x-y=1 \end{cases}$$

a) Giải hệ phương trình với a = 2
b) Giải hệ với a bất kỳ
c) Tìm a để hệ có nghiệm dương

Bài 3: Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} 4x-3y=6 \\ -5x+ay=8 \end{cases}$$

a) Giải hệ phương trình với a = 3
b) Tìm giá trị của a để hệ co nghiệm âm duy nhất

Bài 4: Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x+(m-1)y=12 \\ (m-1)x+12y=24 \end{cases}$$

a) Giải và biện luận hệ phương trình
b) Tìm m để hệ có một nghiệm sao cho x < y

Bài 5: Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} (a+1)x-y=3 \\ ax+y=a \end{cases}$$

a) Giải hệ với a = 2
b) Xác định giá trị của a để hệ có nghiệm x + y > 0

Bài 6: Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x+(m-4)y=16 \\ (4-m)x-50y=80 \end{cases}$$

a) Giải và biện luận hệ phương trình
b) Tìm m để hệ có một nghiệm x +y >1

Bài 7: Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} mx+my=-3 \\ (1-m)x+y=0 \end{cases}$$

a) Giải hệ với m = 2 b)Tìm m để hệ có nghiệm âm

Bài 8: Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} (a+b)x+(a-b)y=1 \\ (2a-b)x+(2a+b)y+2 \end{cases}$$

a) Giải hệ với a = 2 và b = 1
b) Tìm tất cả các cặp giá trị nguyên của a và b để hệ có nghiệm nguyên

Bài 9: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} ax+y=3a-1 \\ x+ay=a+1 \end{cases}$$

a) Giải và biện luận hệ phương trình trên
b) Tìm giá trị nguyên sao cho nghiệm của hệ có giá trị nguyên

Bài 10: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x+ay=b+4 \\ ax+by=8+9a \end{cases}$$

Xác định a, b để hệ có nghiệm x = 3; y = -1

Chủ đề 3: Phương trình

I. Phương trình bậc nhất một ẩn số:

II. Phương trình bậc hai một ẩn số:

Phần I: kiến thức cần nhớ

1. Dạng tổng quát: $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$

Trong đó x là ẩn, a, b, c là các hệ số

Ví dụ: trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình bậc hai một ẩn số:

a) $x^3 + 3x + 5 = 0$ b) $x^2 - 7 = 0$

c) $2x^2 - 3x + 1 = 0$ d) $x - 5 = 0$

Đáp án : Phương trình : b, c là các phương trình bậc hai

2. Công thức nghiệm và công thức nghiệm thu gọn:

a) Công thức nghiệm:

Với phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$

$$\boxed{\Delta = b^2 - 4.a.c}$$

+ $\Delta < 0$ ⇨ phương trình vô nghiệm

+ $\Delta = 0$ ⇨ Phương trình có nghiệm kép : $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$

+ $\Delta > 0$ ⇨ phương trình có hai nghiệm phân biệt :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

b) Công thức nghiệm thu gọn:

Với phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$

Nếu b chẵn. Đặt b = 2b', ta có

$$\boxed{\Delta' = b'^2 - a.c}$$

+ $\Delta' < 0$ ⇨ phương trình vô nghiệm

+ $\Delta' = 0$ ⇨ Phương trình có nghiệm kép : $x_1 = x_2 = \frac{-b'}{a}$

+ $\Delta' > 0$ ⇨ phương trình có hai nghiệm phân biệt :

$$x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} \qquad x_1 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}$$

Ví dụ : Giải các phương trình sau:

a) $3x^2 - 2x + 1 = 0$

$\Delta = (-2)^2 - 4.3.1 = 4 - 12 = -8$; $\Delta < 0$

⇨ Phương trình vô nghiệm

b) $4x^2 - 12x + 9 = 0$

$\Delta = (-12)^2 - 4.4.9 = 144 - 144 = 0$

⇨ Phương trình có nghiệm kép : $x_1 = x_2 = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$

c) $-2x^2 + 5x + 3 = 0$

$\Delta = 5^2 - 4 . (-2). 3 = 25 + 24 = 49$; $\sqrt{\Delta} = 7$

$\Rightarrow$ Phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{-5+7}{-4} = -\frac{1}{2} \qquad x_2 = \frac{-5-7}{-4} = 3$$

3. Hệ thức vi ét – Áp dụng:

a) ***Định lý vi ét:***

Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có hai nghiệm x_1, x_2 thì:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

$$x_1.x_2 = \frac{c}{a}$$

b) Áp dụng : Tính nhẩm nghiệm của phương trình bậc hai:

Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)

+ Nếu $a + b + c = 0$ th ì $x_1 = 1$; $x_2 = \frac{c}{a}$

+ Nếu $a – b + c = 0$ th ì $x_1 = -1$; $x_2 = \frac{-c}{a}$

+ Nếu có hai số x_1, x_2 sao cho

$x_1 + x_2 = S$; $x_1.x_2 = P$ (v ới $P^2 – 4S \geq 0$)

Thì x_1, x_2 là nghiệm của phương trình : $X^2 – SX + P = 0$

Ví dụ 1: a) Tìm hai số biết tổng của chúng bằng 17 và tích của chúng bằng 72.

- Giải -

Gọi x_1, x_2 là hai số cần tìm. Ta có: $x_1 + x_2 = 17$

$x_1.x_2 = 72$

Vậy x_1, x_2 phải là nghiệm của phương trình : $X^2 – 17X + 72 = 0$

$\Delta = (-17)^2 - 4.72 = 289 – 288 = 1$

$\Rightarrow x_1 = (17+ 1) : 2 = 9$; $x_2 = (17 - 1) : 2 = 8$

Vậy hai số cần tìm là 8 và 9

b) Lập một phương trình bậc hai có hai nghiệm là -3 và 7.

Giải

Ta có : $x_1 + x_2 = -3 + 7 = 4$

$x_1 . x_2 = -3 . 7 = -21$

Vì $4^2 – 4 . (-21) \geq 0$

Vậy x_1 , x_2 là nghiệm của phương trình : $x^2 – 4x – 21 = 0$

MỘT SỐ DẠNG BÀI TẬP VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

1. Bài tập về số nghiệm của phương trùnh bậc hai:

Với phương trình : $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)

$\Delta = b^2 – 4.a.c$

+ Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta > 0$ ($\Delta' > 0$)

+ Phương trình có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta = 0$ ($\Delta' = 0$)

+ Phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta < 0$ ($\Delta' < 0$)

2 **Chú ý: Phương trình** $ax^2 + bx + c = 0$ có 1 nghiệm $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0; b \neq 0 \\ a \neq 0; \Delta = 0 \end{array}\right.$

Ví dụ 1: Tìm các giá trị của m để các phương trình sau có hai nghiệm phân biệt :

a) $x^2 -3mx + m^2 – 1 = 0$

b) $2x^2 + 4x – m = 0$

- Giải -

a) Ta có : $\Delta = (-3m)^2 – 4.(m^2 – 1) = 9m^2 – 4m^2 +4$

$\Delta = 3m^2 + 4 > 0$ với mọi m

Vậy phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m

b)Ta có : $\Delta = 4^2 - 4.2.(-m) = 16 + 8m$

$\Delta = 16 + 8m > 0 \Leftrightarrow m > -2$

Vậy với m > - 2 thì phương trình có hai nghiệm phân biệt

Ví dụ 2 : Tìm các giá trị của m để các phương trình sau có nghiệm kép.

a) $(m + 7)x^2 - 2.(m-9)x - 7m + 15 = 0$

b) $15x^2 - 90x + m = 0$

Giải

a) ĐK để phương trình :

$(m + 7)x^2 - 2.(m-9)x - 7m + 15 = 0$ là phương trình bậc hai thì : $m + 7 \neq 0 \Rightarrow m \neq -7$

Ta có:

$$\Delta' = (m - 9)^2 + (m + 7).(7m - 15)$$
$$= m^2 - 18m + 81 + 7m^2 - 15m + 49m - 105$$
$$\Delta' = 8m^2 + 16m - 24 = 8(m^2 + 2m - 3)$$
$$\Delta' = 0 \Leftrightarrow (m^2 + 2m - 3) = 0$$
$$\Rightarrow m = 1 \text{ hoặc } m = -3 \quad \text{(thoả mãn)}$$

Vậy với m = 1 hoặc m= - 3 thì phương trình có nghiệm kép

b) Ta có :

$$\Delta' = 45^2 - 15m = 2025 - 15m$$
$$\Delta' = 0 \Leftrightarrow 2025 - 15m = 0$$
$$\Rightarrow m = 135$$

Vậy với m = 135 thì phương trình có nghiệm kép

Ví dụ 3: : Tìm các giá trị của m để các phương trình sau vô nghiệm

a) $3x^2 - 2x + m = 0$

b) $x^2 + mx + 3 = 0$

Giải

a) $3x^2 - 2x + m = 0$

Để phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta < 0$

Ta có : $\Delta' = 1 - 3m$; $\Delta' < 0 \Leftrightarrow 1 - 3m < 0 \Rightarrow m > \frac{1}{3}$

Vậy với $m > \frac{1}{3}$ thì phương trình vô nghiệm

b) $x^2 + mx + 3 = 0$

Để phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta < 0$

Ta có: $\Delta = m^2 - 4.3 = m^2 - 12$

$$\Delta < 0 \Leftrightarrow m^2 < 12 \Rightarrow -\sqrt{12} < m < \sqrt{12}$$

Vậy với $-\sqrt{12} < m < \sqrt{12}$ thì phương trình vô nghiệm

Ví dụ 4: Tìm các giá trị của m để phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$(m-4)x^2 - 2(m - 2)x + m - 1 = 0$$

Giải

Phương trình có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=0\\ b\neq 0\end{cases}\\ \begin{cases}a\neq 0\\ \Delta'=0\end{cases}\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}m-4=0\\ m-2\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow m=4\\ \begin{cases}m-4\neq 0\\ (m-2)^2-(m-4).(m-1)=0 \qquad (*)\end{cases}\end{array}\right.$

Giải phương trình (*) ta được : $m^2 - 4m + 4 - m^2 + 5m - 4 = 0$

$\Rightarrow m = 0$

Vậy với m = 4 hoặc m = 0 thì phương trình có nghiệm duy nhất.

2. Bài tập về dấu các nghiệm của phương trình bậc hai:

Cho phương trình : : $ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$

a) Điều kiện để phương trình có hai nghiệm cùng dấu:

$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta \geq 0\\ \dfrac{c}{a} > 0\end{cases}$

b) Điều kiện để phương trình có hai nghiệm cùng dấu dương : $\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta \geq 0\\ \dfrac{c}{a} > 0\\ -\dfrac{b}{a} > 0\end{cases}$

c) Điều kiện để phương trình có hai nghiệm cùng dấu âm:

$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta \geq 0\\ \dfrac{c}{a} > 0\\ \dfrac{-b}{a} < 0\end{cases}$

d) Điều kiện để phương trình có hai nghiệm trái dấu:

$\Leftrightarrow$ a.c < 0

Ví dụ : Xác định giá trị của m để các phương trình sau có hai nghiệm cùng dấu:

a) $x^2 - 3x + m - 1 = 0$

b) $x^2 - 2mx + 3 = 0$

Giải

a) $x^2 - 3x + m - 1 = 0$

Để phương trình có hai nghiệm cùng dấu :

$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta \geq 0\\ \dfrac{c}{a} > 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}9-4m+4 \geq 0\\ m-1 > 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m \leq \dfrac{13}{4}\\ m > 1\end{cases}$

Vậy với $1 < m \leq \dfrac{13}{4}$ thì phương trình có hai nghiệm cùng dấu.

2) Để phương trình có hai nghiệm cùng dấu:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ \dfrac{c}{a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3 \geq 0 \\ 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \geq \sqrt{3} \\ m \leq -\sqrt{3} \end{array} \right.$$

3. Bài tập: dạng thành lập một hệ thức đối xứng giữa các nghiệm

Cho phương trình : : $ax^2 + bx + c = 0$

Các hệ thức đối xứng với hai nghiệm của phương trình bậc hai thường gặp :

a) $x_1^2 + x_2^2$ b) $x_1^3 + x_2^3$ c) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ *..v..v*

Cách giải

Bớc 1: Tìm điều kiện để pt bậc 2 đã cho có nghiệm x_1, x_2

Bước2:Ap dụng hệ thức Vi-et tính tổng và tích 2 nghiệm $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} \\ x_1.x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$

Bước 3: **B**iến đổi các hệ thức đối xứng này như sau :

$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$

$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1.x_2.(x_1 + x_2)$

$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1.x_2}$

Bước 4: Thay tổng và tích hai nghiệm vào các biểu thức đối xứng

Ví dụ : Cho phương trình $x^2 + mx + 1 = 0$

Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình. Hãy tính:

a) $x_1^2 + x_2^2$ b) $x_1^3 + x_2^3$

Giải

Theo vi et ta có : $x_1 + x_2 = m$; $x_1.x_2 = 1$

a) Mà $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2.x_1.x_2 = m^2 - 2$

b) $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1.x_2.(x_1 + x_2)$

$= m^3 - 3.m$

4. Bài tập dạng tìm m để phương trình có hai nghiệm thoả mãn một hệ thức:

Cho phương trình : : $ax^2 + bx + c = 0$

+ Bước 1: Tìm ĐK để phương trình có hai nghiệm

+ Bước 2: Nêu hệ thức vi et : $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} & (1) \\ x_1.x_2 = \dfrac{c}{a} & (2) \end{cases}$

+ Bước 3: Nêu hệ thức của bài toán (3)

+ Bước 4 : giải hệ gồm 2 phương trình sau đó thay vào phương trình còn lại để tìm m.

Ví dụ : Cho phương trình: $x^2 - (m + 5)x - m + 6 = 0$

Xác định giá trị của m để nghiệm x_1 , x_2 của phương trình thoả mãn hệ thức : $2x_1 + 3x_2 = 13$

Giải

Tính biệt thức

$\Delta = (m+5)^2 - 4.(-m+6)$

$\Delta = m^2 + 10m + 25 + 4m - 24$

$\Delta = m^2 + 14m + 1$

Hệ phương trình có nghiệm khi $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow m^2 + 14m + 1 \geq 0$

$\Delta_m = 49 - 1 = 48$

$\Rightarrow m_1 = -7 + \sqrt{48}; m_2 = -7 - \sqrt{48}$

Vậy với $\left[\begin{array}{l} m \geq -7 + \sqrt{48} \\ m \leq -7 - \sqrt{48} \end{array}\right.$ thì phương trình có nghiệm (*)

Theo vi et ta có : $x_1 + x_2 = m + 5$ (1)

Và $x_1.x_2 = 6 - m$ (2)

Theo bài ra : $2x_1 + 3x_2 = 13$ (3)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x_1 + x_2 = m + 5 & (1) \\ 2x_1 + 3x_2 = 13 & (3) \end{cases}$

Nhân phương trình (1) với 2 ta được

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 2m + 10 \\ 2x_1 + 3x_2 = 13 \end{cases}$$

Trừ từng vế của hệ ta được : $x_2 = 3 - 2m$ thay vào phương trình (1) ta được : $x_1 + 3 - 2m = m + 5 \Leftrightarrow x_1 = 3m + 2$

Thay $x_1 = 3m + 2$ và $x_2 = 3 - 2m$ vào phương trình (2) ta được

$(3m + 2). (3 - 2m) = 6 - m$

$\Leftrightarrow 9m - 6m^2 + 6 - 4m = 6 - m$

$\Leftrightarrow 6m^2 - 6m = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 1 \end{array}\right.$ thoả mãn ĐK (*)

Vậy với m = 0 hoặc m = 1 thì phương trình có hai nghiệm thoả mãn : $2x_1 + 3x_2 = 13$

5.Bài tập dạng tìm một hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm không phụ thuộc vào tham số:

Cho phương trình : $ax^2 + bx + c = 0$

Cách giải:

+ Bước 1: Tìm ĐK để phương trình có nghiệm ($\Delta \geq 0$ hoặc a.c < 0)

+ Bước 2: Lập S , P ($x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$), $x_1.x_2 = \frac{c}{a}$ theo tham số m

+ Bước 3: Dùng quy tắc cộng hoặc thế để khử m

+ Bước 4 : Thay $S = x_1 + x_2$; $P = x_1.x_2$ ta được hệ thức cần tìm.

Ví dụ : Cho phương trình: $x^2 - 2.(m - 1)x + m^2 - 1 = 0$

Tìm một hệ thức giữa x_1, x_2 không phụ thuộc vào m

Giải

Phương trình có nghiệm : $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0$

Ta có : $\Delta' = (m-1)^2 - (m^2 - 1) = -2m + 2 \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 1$

Áp dụng vi et ta có : $\begin{cases} S = 2(m-1) & (1) \\ P = m^2 - 1 & (2) \end{cases}$

Từ (1) ta có : m = $\frac{S}{2} + 1 \Leftrightarrow m = \frac{S+2}{2}$ thay vào (2)ta được :

P = $\frac{(S+2)^2}{4} - 1 \Leftrightarrow 4P = (S+2)^2 - 4$

$\Leftrightarrow S^2 + 4S - 4P = 0$

Vậy hệ thức liên hệ giữa các nghiệm không phụ thuộc vào m là

$(x_1 + x_2)^2 + 4(x_1 + x_2) - 4x_1.x_2 = 0$

6. Bài tập dạng so sánh nghiệm của phương trình bậc hai với một số bất kì:

Cách giải:

Bước 1: Tìm điều kiện để phương trình có nghiệm ($\Delta \geq 0$)

Bước 2: Áp dụng vi et tính $x_1 + x_2$; $x_1.x_2$ (*)

+Với bài toán : tìm m để phương trình có hai nghiệm > α

$$\Rightarrow \begin{cases}(x_1-\alpha)+(x_2-\alpha)>0\\(x_1-\alpha).(x_2-\alpha)>0\end{cases}$$

Thay biểu thức viet vào hệ để tìm m

+ Với bài toán : tìm m để phương trình có hai nghiệm < α

$$\Rightarrow \begin{cases}(x_1-\alpha)+(x_2-\alpha)<0\\(x_1-\alpha).(x_2-\alpha)>0\end{cases}$$

Thay biểu thức viet vào hệ để tìm m

+ Với bài toán : tìm m để phương trình có hai nghiệm , trong đó một nghiệm > α nghiệm kia < α

$$\Rightarrow (x_1-\alpha).(x_2-\alpha)>0$$

Thay biểu thức viet vào hệ để tìm m

Có thể sử dụng định lý về dấu của tam thức bậc hai:

Nếu $a.f(\alpha)<0 \Rightarrow x_1<\alpha<x_2$

Ví dụ 1: Tìm các giá trị của m để phương trình sau có hai nghiệm lớn hơn 2

$x^2 - 2mx + 8 = 0$ (1)

-Giải-

Để phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0$

Ta có : $\Delta' = m^2 - 8 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \geq 2\sqrt{2}\\ m \leq -2\sqrt{2}\end{array}\right.$

$\Rightarrow$ Vậy với $\left[\begin{array}{l} m \geq 2\sqrt{2}\\ m \leq -2\sqrt{2}\end{array}\right.$ thì phương trình có nghiệm

Theo vi et ta có: $x_1 + x_2 = 2m$

$x_1 . x_2 = 8$

Để phương trình có hai nghiệm lớn hơn 2

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x_1-2)+(x_2-2)>0\\(x_1-2).(x_2-2)>0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x_1+x_2)-4>0\\x_1.x_2-2(x_1+x_2)+4>0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}2m-4>0\\8-4m+4>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m>2\\m<3\end{cases}$$

Vậy với $2\sqrt{2} \leq m < 3$ thì phương trình có hai nghiệm lớn hơn 2

Phần 2: Một số bài tập

Bài 1: Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt cùng dấu:

e) $x^2 - 2x + m = 0$

f) $x^2 - 2mx + 2m - 3 = 0$

Bài 2: Tìm các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm trái dấu:

a) $2x^2 - 6x + m - 2 = 0$

b)$(3 - 2m)x^2 + (m - 1)x - 3 = 0$

Bài 3: Tìm các giá trị của m để phương trình sau có hai nghiệm phân biệt dương:

$2x^2 - mx + 2m - 8 = 0$

Bài 4: Cho phương trình : $x^2 + 4mx + 3m^2 + 2m - 1 = 0$

a) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt

b) Tìm m để phương trình nhận $x = 2$ là nghiệm

Bài 5 : Tìm m để phương trình : $(3 - 2m)x^2 + (m - 1)x + 6 = 0$ nhận $x = 3$ là nghiệm. khi đó tìm nghiệm còn lại?

Bài 6: Cho phương trình : $x^2 - 2mx + 2m - 5 = 0$

a) Chứng minh rằng phương trình có nghiệm với mọi m

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm cùng dấu. Khi đó xác định dấu các nghiệm

Bài 7: Cho phương trình: $x^2 - 2(m+1)x + 4m = 0$

a) Giải phương trình với $m = -2$

b) CMR phương trình có nghiệm với mọi m

c) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình. Tìm m để $x_1^2 + x_2^2 = 4$

Bài 8: Cho phương trình: $x^2 + (m + 1)x + m = 0$

a) CMR phương trình luôn có nghiệm. Tìm các nghiệm đó

b) Với x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình, tìm m để $x_1^2 + x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất

Bài 9: Xác định k để phương trình $x^2 + 2x + k = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thoả mãn một trong các điều kiện sau đây:

a) $x_1^2 + x_2^2 = 1$ b) $x_1^2 - x_2^2 = 12$

Bài 10: Cho phương trình : $x^2 - 2.(m - 1)x + m^2 - 3m = 0$

a) Tìm m để phương trình có hai nghiệm trái dấu

b) Tìm m để phương trình có đúng một nghiệm âm

c) Tìm m để phương trình có một nghiệm $x = 0$. Tìm nghiệm còn lại

d) Tìm m để phương trình có hai nghiệm thoả mãn

$x_1^2 + x_2^2 = 8$

Bài 11: Cho phương trình :$x^2 + 2x + m = 0$

Xác đinh m để phương trình x_1, x_2 thoả mãn $3x_1 + 2x_2 = 1$

Bài 12: Cho phương trình : $2x^2 + (2m - 1)x + m - 1 = 0$

a)Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thoả mãn hệ thức $3x_1 - 4x_2 = 11$

b)Tìm m để phương trình có hai nghiệm âm

c) Tìm một hệ thức giữa x_1, x_2 không phụ thuộc vào m

Bài 13: Xác định k để để phương trình sau có nghiệm x_1, x_2 thoả mãn $x_1 = 2x_2$

a) $x^2 + 6x + k = 0$ b) $x^2 + kx + 8 = 0$

Bài 14: Cho phương trình : $x^2 - 6x + m = 0$

Xác định m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thoả mãn hệ thức $3x_1 + 2x_2 = 20$

Bài 15: Cho phương trình: $3x^2 - (3m - 2)x - (3m + 1) = 0$

a)Chứng tỏ phương trình có nghiệm $x = -1$. Tìm nghiệm còn lại.

b) Xác định m để phương trình có nghiệm thoả mãn $3x_1 - 5x_2 = 6$

c) Tìm một hệ thức giữa các nghiệm độc lạp với m

Bài 16: Cho phương trình : $x^2 - (2m + 3)x + m^2 + 3m + 2 = 0$

a)Chứng minh rằng phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt

b)Xác định m để phương trình có một nghiệm bằng 2. Tìm nghiệm còn lại

c) Xác định m để phương trình có hai nghiệm thoả mãn

$-3 < x_1 < x_2 < 6$

d) Xác định m để phương trình có một nghiệm bằng bình phương nghiệm kia.

Bài 17: Cho phương trình: $x^2 - (m - 3)x + 2m + 1 = 0$

a)Giải phương trình với m = -1

b)Tìm một hệ thức giữa hai nghiệm không phụ thuộc vào m

Bài 18: Cho phương trình: $x^2 - (2m +1)x + m^2 + m -1 = 0$

a)Chứng minh rằng phương trình luôn có nghiệm với mọi m

b)Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trinh. Tìm m sao cho

$(2x_1 - x_2) . (2x_2 - x_1)$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất ấy.

c) Tìm một hệ thức liện hệ giữa hai nghiệm không phụ thuộc vào m

Bài 19: Cho phương trình: $x^2 + (4m + 1)x + 2.(m - 4) =0$

a)Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1,x_2 thoả mãn $x_2 - x_1 = 17$

b) Tìm m để biểu thức $A = (x_1 - x_2)^2$ có giá trị nhỏ nhất

c) Tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm không phụ thuộc vào m

Bài 20: Cho phương trình $mx^2 + 2(m - 2)x + m - 3 = 0$

a) Xác định m để phương trình có hai nghiệm trái dấu.
b) Xác định m để phương trình có hai nghiệm trái dấu và nghiệm âm có giá trị tuyệt đối lớn hơn
c) Tìm một hệ thức liên hệ giữa các nghiệm không phụ thuộc vào m
d) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $x_1^2 + x_2^2$

Bài 21: Cho các phương trình:

$x^2 + ax + bc = 0$

$x^2 + bx + ca = 0$

Trong đó $bc \neq ca$

Giả sử x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình (1)

x_2, x_3 là các nghiệm của phương trình (2)

Hãy viết một phương trình bậc hai có nghiệm là x_1, x_3.

Bài 22: Tìm các giá trị của m để phương trình sau có hai nghiệm phân biệt nhỏ hơn 2

$3x^2 - 4x + 2.(m - 1) = 0$

Bài 23: Cho phương trình : $x^2 - 3x + m + 2 = 0$

Tìm m để phương trình có một nghiệm lớn hơn 3, nghiệm còn lại nhỏ hơn 3

Bài 24: Cho phương trình : $x^2 - (2m + 1)x - m^2 + m - 1 = 0$

a)CMR phương trình có nghiệm với mọi giá trị của m

b)Tìm một hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm không phụ thuộc vào m

Bài 25: Cho phương trình : $x^2 - 2mx - m^2 - 1 = 0$

a)CMR phương trình luôn có nghiệm với mọi m

b)Tìm một biểu thức liên hệ giữa các nghiệm không phụ thuộc và m

c)Tìm các giá trị của m để hai nghiệm x_1, x_2 của phương trình thoả mãn hệ thức

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = -\frac{5}{2}$$

Chủ đề 4: HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ

Phần I : Kiến thức cần nhớ:

I. Hàm số bậc nhất :

1. Dạng tổng quát: $y = ax + b$ $(a \neq 0)$
2. Tính chất :
   + Đồng biến nếu $a > 0$
   + Nghịch biến nếu $a < 0$
3. Đồ thị : Là một đường thẳng cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng b, cắt trục hoành tại điểm có hoàng độ bằng $\frac{-b}{a}$.
4. Sự tương giao của hai đồ thị hàm số bậc nhất:

   Cho hai hàm số : $y = ax + b$ (d)

   $y = a'x + b'$ (d')

   + Nếu $a \neq a'$ ⇨ (d) cắt (d')
   + Nếu $a = a'$; $b \neq b'$ ⇨ (d) // (d')
   + Nếu $a = a'$; $b = b'$ ⇨(d) ≡ (d')
   + Nếu $a.a' = -1$ ⇨ (d) ⊥ (d')

II. Hàm số $y = ax^2 (a\neq0)$

1. Tính chất :
   + Với $a > 0$: - Hàm số đồng biến nếu $x > 0$

     - Hàm số nghịch biến nếu $x < 0$
   + Với $a < 0$: - Hàm số đồng biến nếu $x < 0$

     - Hàm số nghịch biến nếu $x > 0$
2. Đồ thị : Là một đường cong (Parabol) nhận trục tung là trục đối xứng, tiếp xúc với trục hoành tại gốc toạ độ.
   + Nằm phía trên trục hoành nếu $a > 0$
   + Nằm phía dưới trục hoành nếu $a < 0$
3. Sự tương giao của đồ thị hàm số bậc nhất $y = ax + b$ (d) với đồ thị hàm số $y = a'x^2$ (P):

   +Nếu (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt ⇔pt hoành độ giao điểm của (d) và (P) $a'x^2 = ax+b$ có hai nghiệm phân biệt

   + Nếu (d) Tiếp xúc (P) ⇔ pt hoành độ giao điểm của (d) và (P) $a'x^2 = ax + b$ có nghiệm kép

   + Nếu (d) và (P) không có điểm chung ⇔ a pt hoành độ giao điểm của (d) và (P) $'x^2 = ax+b$ vô nghiệm

III. Các bài toán về lập phương trình đường thẳng:

1. Bài toán 1: Lập phương trình đường thẳng có hệ số góc k cho trước và đi qua điểm M $(x_0; y_0)$:

Cách giải:

- Nêu dạng phương trình đường thẳng : $y = ax + b$
- Thay $a = k$ và toạ độ điểm M $(x_0; y_0)$ vào phương trình đường thẳng để tìm b

⇨ Phương trình đường thẳng cần lập

Ví dụ1: Lập phương trình đường thẳng đi qua M (2;-3) và song song với đường thẳng $y = 4x$

-Giải-

Giả sử phương trình đường thẳng cần lập có dạng

$y = ax + b(a\neq 0)$

song song với đường thẳng $y = 4x$ ⇨ $a = 4$.

Đi qua M(2;-3) nên ta có : $-3 = 4.2 + b$ ⇨ $b = -11$

Vậy phương trình đường thẳng cần lập là y = 4x – 11

2. Bài toán 2: Lập phương trình đường thẳng đi qua hai điểm A(x_1;y_1)và B (x_2 ; y_2):

Cách giải:

+ Nêu dạng phương trình đường thẳng : y = ax + b

+ Thay toạ độ điểm A và B vào phương trình đường thẳng ta đợc hệ pt :

$$\begin{cases} y_1 = ax_1 + b \\ y_2 = ax_2 + b \end{cases}$$

+ Giải hệ phương trình tìm a và b

Phương trình đường thẳng cần lập

Ví dụ 2 : Lập phương trình đường thảng đi qua A (2; 1) và B(-3; - 4).

- Giải-

Giả sử phương trình đường thẳng cần lập có dạng:

y = ax + b

Đi qua A (2; 1) nên : 1 = a.2 + b (1)

Đi qua B (-3; -4) nên : -4 = a.(-3) + b (2)

1 – 2a = 3a – 4

5a = 5 ⇨ a = 1.

Thay a = 1 vào (1) ⇨ b = -1

Vậy phương trình đường thẳng cần lập là y = x -1

3. Bài toán 3:

Lập phương trình đường thẳng có hệ số góc k và tiếp xúc với đường cong $y = a'x^2$ (P)

Cách giải :

+ Nêu dạng phương trình đường thẳng : y = ax + b $(a \neq 0)$ (d)

+ Theo bài ra a = k

+ Vì (d) tiếp xúc với (P) nên phương trình:

$a'x^2 = kx + b$ có nghiệm kép ⇔ Δ = 0 (*)

Giải (*) tìm b

Thay vào (d) ta được phương trình đường thẳng cần lập

Ví dụ 3: Lập phương trình đường thẳng song song với đường thẳng y = 2x + 1 và tiếp xúc với parabol $y = -x^2$

- Giải –

Giả sử phương trình đường thẳng cần lập có dạng:

y = ax + b. song song với đường thẳng y = 2x + 1 ⇨ a = 2.

Tiếp xúc với parabol $y = -x^2$ nên phương trình :

$-x^2 = 2x + b$ có nghiệm kép

⇔ $x^2 + 2x + b = 0$ có nghiệm kép

⇔ Δ' = 1 – b ; Δ = 0 ⇔ 1 – b = 0 ⇨ b = 1

Vậy phương trình đường thẳng cần lập là y = 2x + 1

4. Bài toán 4: Lập phương trình đường thẳng đi qua một điểm M(x_0; y_0) và tiếp xúc với đường cong $y = a'x^2$ (P)

Cách giải:

+ Nêu dạng phương trình đường thẳng : y = ax + b (d)

+ Đi qua M (x_0; y_0) nên ⇨ $y_0 = a.x_0 + b$ (1)

+ Tiếp xúc với $y = a'x^2$ nên phương trình :

$a'x^2 = ax + b$ có nghiệm kép ⇔ Δ = 0 (2)

Giải hệ hai phương trình (1) và (2) tìm a, b

phương trình đường thẳng cần lập

Ví dụ 4 : Lập phương trình đường thẳng đi qua M(-1; 2) và tiếp xúc với parabol $y = 2x^2$.

-Giải-

Giả sử phương trình đường thẳng cần lập có dạng:

$y = ax + b$. Đi qua M (-1; 2) nên ta có: $2 = -a + b$ (1)

Tiếp xúc với đường cong $y = 2x^2$ nên phương trình :

$2x^2 = ax + b$ có nghiệm kép

$\Leftrightarrow 2x^2 - ax - b = 0$ có nghiệm kép

$\Rightarrow \Delta = a^2 + 8b$. $\Delta = 0 \Leftrightarrow a^2 + 8b = 0$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ: $-a + b = 2$ (1)

$a^2 + 8b = 0$ (2)

Từ (1) $\Rightarrow b = 2 + a$ (*) thay vào (2) ta được :

$a^2 + 8a + 16 = 0 \Leftrightarrow (a + 4)^2 = 0 \Rightarrow a = -4$

Thay a = -4 vào (*) ta được b = -2

Vậy phương trình đường thẳng cần lập là $y = -4x - 2$

Phần II: Các bài tập về hàm số

Bài tập 1 : Cho hàm số $y = (m^2 - 6m + 12)x^2$

CMR hàm số nghịch biến trong $(-\infty; 0)$, đồng biến $(0; +\infty)$ với mọi m.

Xác định giá trị của m để đồ thị hàm số đi qua (1; 5)

Bài tập 2: Cho hàm số $y = ax^2$ (P)

Xác định a để đồ thị hàm số đi qua (-4; 8). Vẽ đồ thị trong trường hợp đó

Xác định a để đường thẳng $y = 2x + 3$ cắt (P) tại hai điểm phân biệt

Bài 3: Cho hàm số $y = 2x^2$ (P)

Vẽ đồ thị hàm số

Tìm trên đồ thị các điểm cách đều hai trục toạ độ

Tuỳ theo m, hãy xác định số giao điểm của (P) với đường thẳn (d) có phương trình: $y = mx - 1$

Viết phương trình đường thẳng tiếp xúc (P) và đi qua A(0; -2)

Bài 4: Cho parabol $y = \frac{1}{2}x^2$ (P)

a)Viết phương trình đường thẳng đi qua A(-1; 3) và B(2; 6)

b)Tìm toạ độ giao điểm của đường thẳng AB với (P)

Bài 5: Cho đường thẳng có phương trình :

$2(m - 1)x + (m - 2)y = 2$ (d)

Xác định m để đường thẳng cắt parabol $y = x^2$ tại hai điểm phân biệt

CMR đường thẳng đã cho luôn đi qua một điểm cố định với mọi m

Bài 6: Cho parabol $y = \frac{1}{2}x^2$ (P)

Vẽ đồ thị hàm số

Xác định m để đường thẳng $y = x - m$ cắt (P) tại hai điểm phân biệt. Tìm toạ độ giao điểm với m = -2

Viết phương trình đường thẳng tiếp xúc với (P) và đi qua A (2; -1)

Bài 7: Cho hàm số $y = (m - 2)x + n$ (d)

Tìm các giá trị của m và n để đường thẳng (d) đi qua hai điểm A (-1; 2) và B (3; -4)

Xác định m và n để đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ $1 - \sqrt{2}$ và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ là $2 + \sqrt{2}$

Bài 8: Cho parabol $y = ax^2$ (P)

Xác định a để đồ thị hàm số đi qua A(-2; 8)

Tìm các giá trị của a để đường thẳng y = -x + 2 tiếp xúc với (P)

Bài 9: Cho parabol $y = x^2 - 4x + 3$ (P)

Viết phương trình đường thẳng đi qua A (2; 1) và có hệ số góc k

CMR đường thẳng vừa lập luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt với mọi giá trị của k.

Bài 10: Cho parabol $y = x^2$ (P) và đường thẳng y = mx -1 d)

Hãy tìm các giá trị của m để đường thẳng (d) tiếp xúc với (P). Khi đó hãy tìm toạ độ tiếp điểm.

Bài 11: Cho hàm số $y = (m^2 + 1)x - 1$

Hàm số đã cho đồng biến hay nghịch biến? vì sao?

Chứng tỏ rằng đồ thị của hàm số đã cho luôn đi qua một điểm cố đinh với mọi giá trị của m

Biết rằng điểm (1; 1) thuộc đồ thị hàm số. Xác định m và vẽ đồ thị của hàm số ứng với m vừa tìm được

Bài 12: Cho hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$ và y = 2x – 2

Vẽ đồ thị hai hàm số trên cùng mặt phẳng toạ độ

Tìm toạ độ giao điểm của hai đồ thị

Bài 13: Cho hàm số $y = -2x^2$ (P)

Vẽ đồ thị hàm số trên

Một đường thẳng (d) cắt trục tung tại điểm (0; -4), cắt trục hoành tại điểm (2; 0).

Viết phương trình đường thẳng (d)

Tìm toạ độ giao điểm của (d) và (P)

Bài 14: Cho hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$ (P)

Với giá trị nào của m thì đường thẳng y = -x + m cắt (P) tại hai điểm phân biệt

Xác định toạ độ giao điểm trong trường hợp $m = \frac{3}{2}$

Viết phương trình đường thẳng tiếp xúc với (P) và đi qua A (1; -4). Tìm toạ độ tiếp điểm

Bài 15: Cho hàm số $y = 2x^2$

Vẽ đồ thị hàm số

Tìm các giá trị của x để $2x^2 - 3x + 5 < -x + 17$

HƯỚNG DẪN - LỜI GIẢI – ĐÁP SỐ

Chủ đề 1: Biểu thức

Bài 3: Rút gọn biểu thức

$$P = \frac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}+2} - \frac{2}{\sqrt{x}-1} (x \geq 0; x \neq 0)$$

$$P = \frac{(\sqrt{x}+1)^2 - (\sqrt{x}-1)^2 - 4(\sqrt{x}+1)}{2(x-1)}$$

$$P = \frac{x + 2\sqrt{x} + 1 - x + 2\sqrt{x} - 1 - 4\sqrt{x} - 4}{2(x-1)} = \frac{-4}{2(x-1)}$$

P = $\frac{}{x-1}$ (với $x \ge 0; x \ne 1$)

Bài 4*:* Cho biểu thức

P = $\dfrac{15\sqrt{x}-11}{x+2\sqrt{x}-3}+\dfrac{3\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}}-\dfrac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}$

a) Đk : $x \ge 0; x \ne 1$

P= $\dfrac{15\sqrt{x}-11-(3\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)-(2\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)}$

P = $\dfrac{15\sqrt{x}-11-3x-9\sqrt{x}+2\sqrt{x}+6-2x+2\sqrt{x}-3\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)}$

P = $\dfrac{-5x+7\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)}=\dfrac{(\sqrt{x}-1)(2-5\sqrt{x})}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} = \dfrac{2-5\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$

Vậy P = $\dfrac{2-5\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$ Với $x \ge 0; x \ne 1$

b)Tìm các giá trị của x sao cho P = $\dfrac{1}{2}$

Với $x \ge 0; x \ne 1$ Để P = $\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{2-5\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 4-10\sqrt{x}=\sqrt{x}+3$

$\Leftrightarrow 11\sqrt{x}=1 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{121}$

c) Chứng minh rằng P $\le \dfrac{2}{3}$

Để P $\le \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow \dfrac{2-5\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} \le \dfrac{2}{3}$

Ta có : $\dfrac{2-5\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} = \dfrac{-5\sqrt{x}-15+17}{\sqrt{x}+3}=-5+\dfrac{17}{\sqrt{x}+3}$

Vì x $\ge \Rightarrow \sqrt{x}+3 \ge 3 \Rightarrow -5+\dfrac{17}{\sqrt{x}+3} \le -5+\dfrac{17}{3}=\dfrac{2}{3}$

Vậy P $\le \dfrac{2}{3}$ (đpcm)

Bài 5*:* Cho biểu thức

P = $\dfrac{3a+\sqrt{9a}-3}{a+\sqrt{a}-2}-\dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}+2}+\dfrac{\sqrt{a}-2}{1-\sqrt{a}}$

-G-

a) Đk : $a \ge 0; a \ne 1$

P = $\dfrac{3a+3\sqrt{a}-3-(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-1)-(\sqrt{a}-2)(\sqrt{a}+1)}{(\sqrt{a}+2)(\sqrt{a}-1)}$

P = $\dfrac{a-3\sqrt{a}+2}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+2)}=\dfrac{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}-2)}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+2)}=\dfrac{\sqrt{a}-2}{\sqrt{a}+2}$

Vậy với $a\ge 0; a\ne 1$ thì P = $\dfrac{\sqrt{a}-2}{\sqrt{a}+2}$

b) P = $\dfrac{\sqrt{a}-2}{\sqrt{a}+2}$ = 1 - $\dfrac{4}{\sqrt{a}+2}$

Để P $\in Z\Rightarrow \dfrac{4}{\sqrt{a}+2}\in Z\Rightarrow 4 \vdots \sqrt{a}+2$

$\Rightarrow$
$\sqrt{a}+2 = 4\Rightarrow a=4$
$\sqrt{a}+2$ = -4 (loại)
$\sqrt{a}+2 = 2\Rightarrow a=0$
$\sqrt{a}+2$ = -2 (loại)
$\sqrt{a}+2$ = -1 (loại)
$\sqrt{a}+2 = 1\Rightarrow \sqrt{a}=-1$ (loại)

Vậy Với a = 0 hoặc a = 4 thì P $\in Z$

Bài 6*:* Cho biểu thức

M = $\dfrac{x+1-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}+\dfrac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$

a) Tìm x để biểu thức M có nghĩa; b) Rút gọn M

c) Với giá trị nào của x thì M < 1

-G-

a) Với $x\ge 0; x\ne 1$ thì M có nghĩa

b) M = $\dfrac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}-1}+\dfrac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+1}=2\sqrt{x}-1$

Vậy với $x\ge 0; x\ne 1$ thì M = $2\sqrt{x}-1$

c)Với $x\ge 0; x\ne 1$ để M < 1 $\Leftrightarrow 2\sqrt{x}-1<1$

$\Leftrightarrow x<1$

Bài 7*:* Cho biểu thức

P = $\left(\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1}-\dfrac{1}{a-\sqrt{a}}\right):\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}+1}+\dfrac{2}{a-1}\right)$

a) Rút gọn P.

b) Tính giá trị P khi a = 3 + $2\sqrt{2}$

c) T ìm các giá trị của a sao cho P < 0.

-G-

a) Đk: $a>0; a\ne 1$

P = $\left(\dfrac{a-1}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)}\right):\left(\dfrac{\sqrt{a}-1+2}{a-1}\right)$ = $\dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}}:\dfrac{1}{\sqrt{a}-1}$ = $\dfrac{a-1}{\sqrt{a}}$

Vậy với $a > 0; a \neq 1$ thì P = $\frac{a-1}{\sqrt{a}}$

b)Khi a = 3 + 2$\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{a} = \sqrt{2}+1$

P = $\frac{a-1}{\sqrt{a}}$ = $\frac{3+2\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = \frac{2(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}+1} = 2$

Vậy với a = 3 + 2$\sqrt{2}$ thì P = 2

c) Để P < 0 $\Leftrightarrow \frac{a-1}{\sqrt{a}} \prec 0 \Rightarrow a-1 < 0 \Rightarrow a < 1$

Vậy với 0 < a < 1 thì P< 0

Bài 8*:* Cho biểu thức

P = $\left(\frac{4\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}} + \frac{8x}{4-x}\right) : \left(\frac{\sqrt{x}-1}{x-2\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}}\right)$

a) Rút gọn P.

b) Tính x để P = -1

c)Tìm m để với mọi giá trị x >9 ta có m($\sqrt{x}$ - 3)P > x + 1.

-Giải-

a)Rút gọn:

ĐK: $x > 0; x \neq 4$. P = $\frac{4x}{\sqrt{x}-3}$

b)Để P = -1 $\Leftrightarrow \frac{4x}{\sqrt{x}-3} = -1 \Leftrightarrow 4x + \sqrt{x} - 3 = 0$ (với x$\neq 9$)

$\Leftrightarrow (\sqrt{x}+1)(4\sqrt{x}-3) = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{3}{4} \Rightarrow x = \frac{16}{9}$

Vậy với x = $\frac{16}{9}$ thì P = -1

c)Với x > 9 để m($\sqrt{x}$ - 3)P > x + 1.

$\Leftrightarrow m.(\sqrt{x}-3)\frac{4x}{\sqrt{x}-3} > x+1$

$\Leftrightarrow 4mx > x+1 \Leftrightarrow 4mx - x > 1$

$\Leftrightarrow x > \frac{1}{4m-1} = 9 \Rightarrow 1 = 36m - 9$

$\Rightarrow 36m = 10 \Rightarrow m = \frac{5}{18}$

Vậy với $m = \frac{5}{18}$ thì m($\sqrt{x}$ - 3)P > x + 1.

Bài 9*:* Cho biểu thức

P = $\left(\sqrt{x} + \frac{y+\sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right) : \left(\frac{x}{\sqrt{xy}+y} + \frac{y}{\sqrt{xy}+x} - \frac{x+y}{\sqrt{xy}}\right)$

a) Tìm x, y để P có nghĩa.

b) Rút gọn P.

c) Tìm giá trị của P với x = 3, y = 4 - 2$\sqrt{3}$

-Giải-

a) Để P có nghĩa $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} \ge 0 \\ \sqrt{y} \ge 0 \\ \sqrt{xy} + y \ne 0 \\ \sqrt{xy} + x \ne 0 \\ \sqrt{xy} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$

Vậy với x > 0; y > 0 thì P có nghĩa

b)P = $\left(\sqrt{x} + \dfrac{\sqrt{y}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right) : \left(\dfrac{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{\sqrt{xy}(\sqrt{x}+\sqrt{y})} - \dfrac{x+y}{\sqrt{xy}}\right)$

P= $(\sqrt{x}+\sqrt{y}) : \left(\dfrac{x-\sqrt{xy}+y-x-y}{\sqrt{xy}}\right) = (\sqrt{x}+\sqrt{y}) : (-1)$

Vậy P = - $(\sqrt{x}+\sqrt{y})$

c)Với x = 3 $\Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{3}$; y = 4 -2$\sqrt{3}$ $\Rightarrow \sqrt{y} = \sqrt{3} - 1$

Thay vào ta được P = 1 - 2$\sqrt{3}$

Bài 11: Cho biểu thức

P = $\dfrac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \dfrac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} - \dfrac{\sqrt{x}+1}{x-1}$

a) Rút gọn P

b) Chứng minh: P < $\dfrac{1}{3}$ với x $\ge$ 0 với x $\ne 1$.

Giải

a) ĐK : $x \ge 0; x \ne 1$

P = $\dfrac{x+2}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} + \dfrac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} - \dfrac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}$

P = $\dfrac{(x+2)+(x-1)-(x+\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} = \dfrac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}$

Vậy P = $\dfrac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}$ với $x \ge 0; x \ne 1$

b)Ta có : $x - 2\sqrt{x} + 1 > 0$ với $x \ge 0; x \ne 1$

$\Leftrightarrow x + \sqrt{x} + 1 > 3\sqrt{x}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{3} > \dfrac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}$

Hay P < $\dfrac{1}{3}$

***Bài 12**:* Cho biểu thức

P = $\left(\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-1} - \dfrac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1}\right) \cdot \left(\dfrac{1-x}{\sqrt{2}}\right)^2$

a) Rút gọn P.

b) Chứng minh rằng nếu 0 < x < 1 thì P > 0.

c) Tìm GTLN của P.

-GIẢI-

a) ĐK : $x \neq 1$

P = $\sqrt{x}(1-\sqrt{x})$

b)Với 0 < x < 1 $\Rightarrow \begin{cases} 1-\sqrt{x} > 0 \\ \sqrt{x} > 0 \end{cases} \Rightarrow$ $\sqrt{x}(1-\sqrt{x})$ hay P > 0

c) Ta có P = -x + $\sqrt{x} \Leftrightarrow P = -(x-\sqrt{x}) = -(\sqrt{x}-\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}$

Vậy Max P = $\frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$

Bài 13*:* Chứng minh giá trị của biểu thức

$$P = \frac{2x}{x+3\sqrt{x}+2} + \frac{5\sqrt{x}+1}{x+4\sqrt{x}+3} + \frac{\sqrt{x}+10}{x+5\sqrt{x}+6}$$

Không phụ thuộc vào biến số x.

-Giải-

ĐK : $x > 0$

Ta có P = $\frac{2x}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)} + \frac{5\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+3)} + \frac{\sqrt{x}+10}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}+3)}$

P = $\frac{2x\sqrt{x}+12x+22\sqrt{x}+12}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}+3)} = \frac{(\sqrt{x}+1)(2x+10\sqrt{x}+12)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}+3)}$

P = $\frac{2.(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}+3)} = 2$

Vậy với x > 0 P không phụ thuộc vai biến

Bài 14*:* Cho biểu thức

A = $\left(\frac{x\sqrt{x}+1}{x-1} - \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}\right) : \left(\sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\right)$ với x>0 vàx≠1

a) Rút gọn A

b) Tìm giá trị của x để A = 3

-Giải-

a) với x>0 vàx≠1;

A = $\left(\frac{x-\sqrt{x}+1-x+1}{\sqrt{x}-1}\right) : \left(\frac{x}{\sqrt{x}-1}\right) = \frac{2-\sqrt{x}}{x}$

Vậy với x>0 vàx≠1 thì A = $\frac{2-\sqrt{x}}{x}$

$\Leftrightarrow \frac{2+\sqrt{x}}{x} = 3$

b) Để A = 3 $\Leftrightarrow 3x + \sqrt{x} - 2 = 0$

$\Leftrightarrow (\sqrt{x}+1)(3\sqrt{x}-2) = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{9}$

Vậy với x = $\frac{4}{9}$ thì A = 3

Chủ đề 3: Phương trình:

***Bài 1**: :* Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt cùng dấu:

a) $x^2 - 2x + m = 0$

b) $x^2 - 2mx + 2m - 3 = 0$

-G-

a)Để phương trình có hai nghiệm phân biệt cùng dấu:

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-m > 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m > 0 \end{cases}$

Vậy với $0 < m < 1$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt cùng dấu.

b) Để phương trình có hai nghiệm phân biệt cùng dấu:

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m + 3 > 0 \\ 2m - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall m \\ m > \frac{3}{2} \end{cases}$

Vậy với m> $\frac{3}{2}$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt cùng dấu.

Bài 2:

a) Phương trình có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow$ a.c < 0

$\Leftrightarrow$ 2.(2m - 8)< 0 $\Leftrightarrow$ m < 4

Vậy với m < 4 thì phương trình có hai nghiệm trái dấu

b) Phương trình có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow$ a.c < 0

$\Leftrightarrow$ (3 – 2m). (-3) < 0 $\Leftrightarrow$ 3 – 2m > 0 $\Leftrightarrow$ m < $\frac{3}{2}$

Vậy với m < $\frac{3}{2}$ thì phương trình có hai nghiệm trái dấu

Bài 3: Tìm các giá trị của m để phương trình sau có hai nghiệm phân biệt dương:

$2x^2 - mx + 2m - 8 = 0$

-G-

Phương trình có hai nghiệm phân biệt dương

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \\ \frac{-b}{a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4.2.(2m-8) > 0 \\ \frac{2m-8}{2} > 0 \\ \frac{m}{2} > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 16m + 64 > 0 \\ m - 4 > 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall m \\ m > 4 \\ m > 0 \end{cases}$

Vậy với m > 4 thì phương trình có hai nghiệm phân biệt dương

Bài 4: Cho phương trình : $x^2 + 4mx + 3m^2 + 2m - 1 = 0$

a)Để phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0$

$$\Delta' = 4m^2 - 3m^2 - 2m + 1 = m^2 - 2m + 1$$

Ta có : $\Delta' = (m-1)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 1$

Mậy với $m \neq 1$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt

b)Phương trình nhận x = 2 là nghiệm nên ta có :

$4 + 8m + 3m^2 + 2m - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 3m^2 + 10m + 3 = 0$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} m_1 = -3 \\ m_2 = \dfrac{-1}{3} \end{array}\right.$$

Vậy với m = -3 hoặc m = $\dfrac{-1}{3}$ thì phương trình nhận x = 2 là nghiệm

Bài 5:

Đáp số : m = 2 thì PT nhận $x_1 = 3$ là nghiệm. nghiệm còn lại là $x_2 = 2$

Bài 6:

a) Ta có : $\Delta' = m^2 - 2m + 5 = (m-1)^2 + 4 > 0$ với $\forall m$

Vậy phương trình có nghiệm với mọi m

b) Vì $\Delta' > 0 \Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm cùng dấu

$\Leftrightarrow 2m - 5 > 0 \Leftrightarrow m > \dfrac{5}{2}$

Theo vi et ta có $x_1 + x_2 = 2m$.

Vì $m > \dfrac{5}{2}$ nên 2m > 0 .

Vậy với $m > \dfrac{5}{2}$ thì phương trình có hai nghiệm cùng dấu dương.

Bài 7:

Cho phương trình: $x^2 - 2(m+1)x + 4m = 0$

a) Với m = -2 $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x_2 = -4 \end{array}\right.$

b)Ta có : $\Delta' = (m+1)^2 - 4m = (m-1)^2 \geq 0$ với mọi m

Vậy PT có nghiệm với mọi m

c) Theo vi et ta có : $x_1 + x_2 = 2m + 2$

$x_1.x_2 = 4m$

Để $x_1^2 + x_2^2 = 4 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1.x_2 = 4$

$\Leftrightarrow (2m + 2)^2 - 2.4m = 4$

$\Leftrightarrow m^2 + 2m + 1 - 2m = 1$

$\Leftrightarrow m = 0$

Vậy với m = 0 thì phương trình có hai nghiệm thoả mãn

$x_1^2 + x_2^2 = 4$

Chủ đề 4: Hàm số và đồ thị:

Bài 1: hàm số y = $(m^2 – 6m + 12)x^2$

a) Vì $m^2 – 6m + 12 = (m - 3)^2 + 3 > 0$ với mọi m

Vậy hàm số đồng biến với mọi m

b) Đồ thị hàm số đi qua (1; 5) nên ta có:

$5 = m^2 – 6m + 12$

$\Leftrightarrow m^2 – 6m + 7 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m = 3 - \sqrt{2} \\ m = 3 + \sqrt{2} \end{array}\right.$

Vậy với $\left[\begin{array}{l} m = 3 - \sqrt{2} \\ m = 3 + \sqrt{2} \end{array}\right.$ thì đồ thị hàm số đi qua (1; 5)

Bài 2: hàm số $y = ax^2$ (P)

a)Đồ thị hàm số đi qua (-4; 8) nên ta có:

$8 = (-4)^2.a \Leftrightarrow 8 = 16a \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

Vậy với $a = \frac{1}{2}$ thì (P) đi qua (-4; 8)

b)Đường thẳng y = 2x + 3 cắt (P) tại hai điểm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình : $ax^2 = 2x + 3$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow ax^2 – 2x -3 =0$

$\Delta' = 1 + 3a > 0 \Rightarrow a > \frac{-1}{3}$

Vậy với $a > \frac{-1}{3}$ thì đường thẳng y = 2x + 3 cắt (P) tại hai điểm phân biệt

Bài 3: Cho hàm số $y = 2x^2$ (P)

a) Học sinh tự vẽ

b)Giả sử điểm M(x; y) cách đều hai trục toạ độ $\Rightarrow |x| = |y|$

Vậy tập hợp các điểm cách đều hai trục toạ độ thuộc đồ thị hàm số $y = 2x^2$ phải là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} y = 2x^2 \\ |x| = |y| \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} y = 2x^2 \\ y = x \end{cases} & (I) \\ \begin{cases} y = 2x^2 \\ y = -x \end{cases} & (II) \end{array}\right.$$

Giải hệ (I) ta có $2x^2 = x \Leftrightarrow x(2x - 1) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \frac{1}{2} \end{array}\right.$

Giải hệ (II) ta có: $2x^2 = -x \Leftrightarrow x(2x + 1) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \frac{-1}{2} \end{array}\right.$

Với x = 0 thay vào (P) ta được y = 0

Với x = $\frac{1}{2}$ thay vào (P) ta được y = $\frac{1}{2}$

Với x = - $\frac{1}{2}$ thay vào (P) ta được y = $\frac{1}{2}$

Vậy các điểm cách đều hai trục toạ độ là (0; 0), ($\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$), (-$\frac{1}{2}$;$\frac{1}{2}$)

c) số giao điểm của (P) và (d) là nghiệm của phương trình:

$2x^2 = mx - 1$

$\Delta = m^2 - 8$

+ $\Delta > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 2.\sqrt{2} \\ m < -2\sqrt{2} \end{array}\right.$ $\Rightarrow$ cắt nhau

+ $\Delta = 0 \Leftrightarrow$ m = $\pm 2\sqrt{}$ $\Rightarrow$ Tiếp xúc

+ $\Delta < 0 \Leftrightarrow -2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$ $\Rightarrow$ không giao nhau

d) Lập được hai phương trình là : y = 4x – 2 và y = -4x -2

ĐỀ CƯƠNG ÔN THI VÀO 10

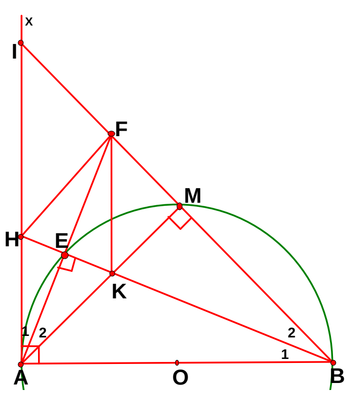
PHẦN HÌNH HỌC

Ví dụ 1:

Cho nửa đờng tròn tâm O đờng kính AB và điểm M bất kì trên nửa đờng tròn (M khác A,B). Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đờng tròn kẻ tiếp tuyến Ax. Tia BM cắt Ax tại I; tia phân giác của góc IAM cắt nửa đờng tròn tại E; cắt tia BM tại F tia BE cắt Ax tại H, cắt AM tại K.

1) Chứng minh rằng: EFMK là tứ giác nội tiếp.
2) Chứng minh rằng: AI^2 = IM . IB.
3) Chứng minh BAF là tam giác cân.
4) Chứng minh rằng : Tứ giác AKFH là hình thoi.
5) Xác định vị trí M để tứ giác AKFI nội tiếp đợc một đờng tròn.

Lời giải:



1. Ta có : $\angle AMB = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đờng tròn)

=> $\angle KMF = 90^0$ (vì là hai góc kề bù).

$\angle AEB = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đờng tròn)

=> $\angle KEF = 90^0$ (vì là hai góc kề bù).

=> $\angle KMF + \angle KEF = 180^0$. Mà $\angle KMF$ và $\angle KEF$ là hai góc đối của tứ giác EFMK do đó EFMK là tứ giác nội tiếp.

2.Ta có $\angle IAB = 90^0$ (vì AI là tiếp tuyến) => ΔAIB vuông tại A có AM $\perp$ IB (theo trên). áp dụng hệ thức giữa cạnh và đờng cao => AI^2 = IM . IB.

3.Theo giả thiết AE là tia phân giác góc IAM => $\angle IAE = \angle MAE$ => AE = ME (*lí do ….*)

=> ∠ABE = ∠MBE (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau) => BE là tia phân giác góc ABF. (1)

Theo trên ta có ∠AEB = 90^0 => BE ⊥ AF hay BE là đờng cao của tam giác ABF (2).

Từ (1) và (2) => BAF là tam giác cân. tại B .

4.BAF là tam giác cân. tại B có BE là đờng cao nên đồng thời là đơng trung tuyến => E là trung điểm của AF. (3)

Từ BE ⊥ AF => AF ⊥ HK (4), theo trên AE là tia phân giác góc IAM hay AE là tia phân giác ∠HAK (5)

Từ (4) và (5) => HAK là tam giác cân. tại A có AE là đờng cao nên đồng thời là đơng trung tuyến => E là trung điểm của HK. (6).

Từ (3) , (4) và (6) => AKFH là hình thoi (vì có hai đờng chéo vuông góc với nhau tại trung điểm của mỗi đờng).

5.(HD). Theo trên AKFH là hình thoi => HA // FK hay IA // FK

=> tứ giác AKFI là hình thangThật vậy: M là trung điểm của cung AB => ∠ABM = ∠MAI = 45^0 (t/c góc nội tiếp). (7)

Tam giác ABI vuông tại A có ∠ABI = 45^0 => ∠AIB = 45^0 .(8)

Từ (7) và (8) => ∠IAK = ∠AIF = 45^0 => AKFI là hình thang cân (hình thang có hai góc đáy bằng nhau).

Vậy khi M là trung điểm của cung AB thì tứ giác AKFI nội tiếp đợc một đờng tròn.

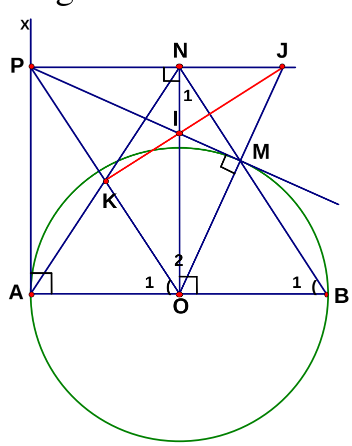
Ví dụ 2:

Cho đờng tròn (O; R) đờng kính AB. Kẻ tiếp tuyến Ax và lấy trên tiếp tuyến đó một điểm P sao cho AP > R, từ P kẻ tiếp tuyến tiếp xúc với (O) tại M.

Chứng minh rằng tứ giác APMO nội tiếp đợc một đờng tròn2. Chứng minh BM // OP.

3. Đờng thẳng vuông góc với AB ở O cắt tia BM tại N. Chứng minh tứ giác OBNP là hình bình hành.

4. Biết AN cắt OP tại K, PM cắt ON tại I; PN và OM kéo dài cắt nhau tại J. Chứng minh I, J, K thẳng hàng.



Lời giải:

(HS tự làm).

2. Ta có ∠ ABM nội tiếp chắn cung AM; ∠ AOM là góc ở tâm chắn cung AM => ∠ ABM = $\frac{\angle AOM}{2}$ (1) OP là tia phân giác ∠ AOM (t/c hai tiếp tuyến cắt nhau) => ∠ AOP = $\frac{\angle AOM}{2}$ (2)

Từ (1) và (2) => ∠ ABM = ∠ AOP (3) Mà ∠ ABM và ∠ AOP là hai góc đồng vị nên suy ra BM // OP. (4)

3.Xét hai tam giác AOP và OBN ta có : ∠PAO=90^0 (vì PA là tiếp tuyến); ∠NOB = 90^0 (gt

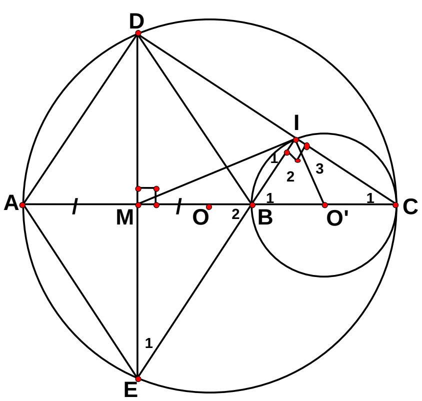
NO ⊥ AB).
=> ∠PAO = ∠NOB = 90^0; OA = OB = R; ∠AOP = ∠OBN (theo (3)) => ΔAOP = ΔOBN => OP = BN (5)
Từ (4) và (5) => OBNP là hình bình hành (vì có hai cạnh đối song song và bằng nhau).
4. Tứ giác OBNP là hình bình hành => PN // OB hay PJ // AB, mà ON ⊥ AB => ON ⊥ PJ
Ta cũng có PM ⊥ OJ (PM là tiếp tuyến), mà ON và PM cắt nhau tại I nên I là trực tâm tam giác POJ. (6)
Dễ thấy tứ giác AONP là hình chữ nhật vì có ∠PAO = ∠AON = ∠ONP = 90^0 => K là trung điểm của PO (t/c đờng chéo hình chữ nhật). (6)
AONP là hình chữ nhật => ∠APO = ∠ NOP (so le) (7)Theo t/c hai tiếp tuyến cắt nhau Ta có PO là tia phân giác ∠APM => ∠APO = ∠MPO (8).Từ (7) và (8) => ΔIPO cân tại I có IK là trung tuyến đông thời là đờng cao => IK ⊥ PO. (9)
Từ (6) và (9) => I, J, K thẳng hàng.

Ví dụ 3:

Cho đờng tròn (O) đờng kính AC. Trên bán kính OC lấy điểm B tuỳ ý (B khác O, C). Gọi M là trung điểm của đoạn AB. Qua M kẻ dây cung DE vuông góc với AB. Nối CD, Kẻ BI vuông góc với CD.

1. Chứng minh tứ giác BMDI nội tiếp .
   Chứng minh tứ giác ADBE là hình thoi.
   Chứng minh BI // AD.
   Chứng minh I, B, E thẳng hàng.
   Chứng minh MI là tiếp tuyến của (O’).

Lời giải:



1. ∠BIC = 90^0 (nội tiếp chắn nửa đờng tròn) => ∠BID = 90^0 (vì là hai góc kề bù); DE ⊥ AB tại M => ∠BMD = 90^0
=> ∠BID + ∠BMD = 180^0 mà đây là hai góc đối của tứ giác MBID nên MBID là tứ giác nội tiếp.

2. Theo giả thiết M là trung điểm của AB; DE ⊥ AB tại M nên M cũng là trung điểm của DE (quan hệ đờng kính và dây cung)
=> Tứ giác ADBE là hình thoi vì có hai đờng chéo vuông góc với nhau tại trung điểm của mỗi đờng .

3. ∠ADC = 90^0 (nội tiếp chắn nửa đờng tròn) => AD ⊥ DC; theo trên BI ⊥ DC => BI // AD. (1)

4. Theo giả thiết ADBE là hình thoi => EB // AD (2).
Từ (1) và (2) => I, B, E thẳng hàng (vì qua B chỉ có một đờng thẳng song song với AD mà thôi.)

5. I, B, E thẳng hàng nên tam giác IDE vuông tại I => IM là trung tuyến (vì M là trung điểm của DE) => MI = ME => ΔMIE cân tại M => $\angle I_1 = \angle E_1$, ΔO'IC cân tại O' (vì O'C và O'I cùng là bán kính) => $\angle I_3 = \angle C_1$ mà $\angle C_1 = \angle E_1$ (Cùng phụ với góc EDC) => $\angle I_1 = \angle I_3$ => $\angle I_1 + \angle I_2 = \angle I_3 + \angle I_2$. Mà $\angle I_3 + \angle I_2 = \angle BIC = 90^0$ => $\angle I_1 + \angle I_2 = 90^0 = \angle MIO'$ hay MI $\perp$ O'I tại I => MI là tiếp tuyến của (O').

Chủ đề 2. TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

1. Định lí Ta lét:

ΔABC ; B'C'// BC

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}; \frac{AB'}{B'B} = \frac{AC'}{C'C}$$

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}; \frac{AB}{BB'} = \frac{AC}{CC'}; \frac{AB'}{BB'} = \frac{AC'}{CC'}$$

2.Tính chất đường phân giác của tam giác:

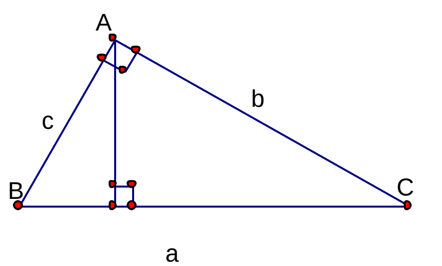
AD, AE là pphân giác trong và ngoài của A suy ra:

.AD $\perp$ AE

. $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{BE}{EC}$

3. Các trường hợp đồng dạng của tam giác:

Tỉ số đồng dạng của tam giác:



4. Hệ thức lượng trong tam giác vuông:

$b^2 = b'.a; c^2 = c'.a$

$a^2 = b^2 + c^2$

$h^2 = b'.c'$

$a.h = b.c$

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

<u>Ví dụ 1:</u>

Cho nửa đờng tròn đờng kính AB = 2R. Từ A và B kẻ hai tiếp tuyến Ax, By. Qua điểm M thuộc nửa đờng tròn kẻ tiếp tuyến thứ ba cắt các tiếp tuyến Ax , By lần lợt ở C và D. Các đờng thẳng AD và BC cắt nhau tại N.

Chứng minh AC + BD = CD.

Chứng minh $\widehat{COD} = 90^0$.3. Chứng minh AC. BD = $\frac{AB^2}{4}$.

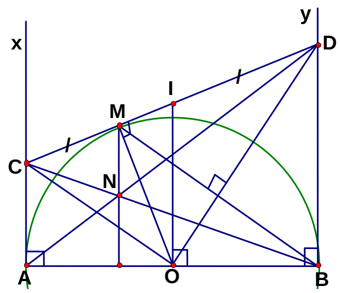
4. Chứng minh OC // BM

5. Chứng minh AB là tiếp tuyến của đờng tròn đờng kính CD.

5.Chứng minh MN ⊥ AB.

6.Xác định vị trí của M để chu vi tứ giác ACDB đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải:



Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có: OC là tia phân giác của góc AOM; OD là tia phân giác của góc BOM, mà ∠AOM và ∠BOM là hai góc kề bù => ∠COD = 90^0.

Theo trên ∠COD = 90^0 nên tam giác COD vuông tại O có OM ⊥ CD (OM là tiếp tuyến).

áp dụng hệ thức giữa cạnh và đờng cao trong tam giác vuông ta có OM^2 = CM. DM,

Mà OM = R; CA = CM; DB = DM => AC. BD =R^2 => AC. BD = $\frac{AB^2}{4}$.

Theo trên ∠COD = 90^0 nên OC ⊥ OD .(1)

Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có: DB = DM; lại có OM = OB =R => OD là trung trực của BM => BM ⊥ OD .(2). Từ (1) Và (2) => OC // BM (Vì cùng vuông góc với OD).

Gọi I là trung điểm của CD ta có I là tâm đờng tròn ngoại tiếp tam giác COD đờng kính CD

có IO là bán kính.6. Teo tính chất tiếp tuyến ta có AC ⊥ AB; BD ⊥ AB => AC // BD => tứ giác ACDB là hình thang. Lại có I là trung điểm của CD; O là trung điểm của AB => IO là đờng trung bình của hình thang ACDB

$\Rightarrow$ IO // AC , mà AC ⊥ AB => IO ⊥ AB tại O

=> AB là tiếp tuyến tại O của đờng tròn đờng kính CD

Theo trên AC // BD => $\frac{CN}{BN} = \frac{AC}{BD}$, mà CA = CM; DB = DM nên suy ra $\frac{CN}{BN} = \frac{CM}{DM}$

=> MN // BD mà BD ⊥ AB => MN ⊥ AB.

(HD): Ta có chu vi tứ giác ACDB = AB + AC + CD + BD mà AC + BD = CD nên suy ra chu vi tứ giác ACDB = AB + 2CD mà AB không đổi nên chu vi tứ giác ACDB nhỏ nhất khi CD nhỏ nhất , mà CD nhỏ nhất khi CD là khoảng cách giữ Ax và By tức là CD vuông góc với Ax và By. Khi đó CD // AB

=> M phải là trung điểm của cung AB

TRẮC NGHIỆM

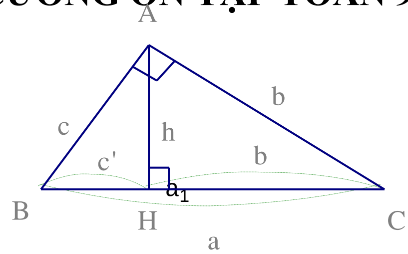
Câu 1: Quan sát hình 1 rồi điền vào chỗ trống các hệ thức thích hợp.

1) b^2 = ...

2) c^2 = ...

3) h^2 = ...

4) a.h =..............



H.1

<u>Câu 2 :</u> *Khoanh tròn vào một chữ cái đứng trớc câu trả lời đúng nhất.*

Trong hình 2

a) SinC bằng:

A. $\frac{AB}{AC}$; B. $\frac{AC}{AB}$; C. $\frac{AB}{BC}$; D. $\frac{AH}{HC}$

b) Cosα bằng:

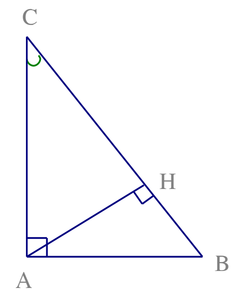
A. $\frac{AB}{AC}$; B. $\frac{AC}{AB}$; C. $\frac{AB}{BC}$; D. $\frac{AC}{BC}$

c) tanα bằng:

A. $\frac{AH}{AC}$; B. $\frac{AC}{AB}$; C. $\frac{AH}{CH}$; D. $\frac{AC}{BC}$

d) cotα bằng:

A. $\frac{CH}{AH}$; B. $\frac{CH}{AC}$; C. $\frac{AB}{BC}$; D. $\frac{AC}{BC}$



H.2

<u>Câu 3</u>: Giá trị của biểu thức $\frac{\cos 50^0}{\sin 40^0}$ A/ 0 B/ 2 C/ 1 D/ - 1 E/ Kết quả khác

<u>Câu 4</u>: Trong hình vẽ 3 (H.3) ; ta có :

A/ cos α = tgα D/ cosβ = tgα

B/ tanα= cotβ E/ cotβ = sinα. cos β

C/ cotβ = sinα

<u>Câu 5</u>: Nếu biết sin α = 0,8 thì giá trị của cosα là :

A/ 0,6 B/ 0,2 C/ 0,1 D/ Kết quả khác

<u>Câu 6</u> : Cho tam giác MNP vuông tại M có MN = $\frac{1}{3}$ NP . Khi đó :

A/ cosN = $\frac{1}{3}$ B/ cosN =1 C/ cosN = 0,5 D/ Kết quả khác.

BÀI TẬP<u>Bài 1</u>.Cho nửa đờng tròn tâm O có đờng kính AB = 2R. Kẻ hai tia tiếp tuyến Ax và By của nửa đờng tròn (Ax, By và nửa đờng tròn cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ AB). Gọi M là điểm tùy ý thuộc nửa đờng tròn (khác A và B). Tiếp tuyến tại M của nửa đờng tròn cắt Ax tại D và cắt By tại E.

Chứng minh rằng: ΔDOE là tam giác vuông.

Chứng minh rằng: $AD \cdot BE = R^2$.

Xác định vị trí của điểm M trên nửa đờng tròn (O) sao cho diện tích của tứ giác ADEB

Bài 2. Cho nửa đờng tròn tâm O đờng kính AB bằng 2R. M là một điểm tuỳ ý trên nửa đờng tròn (M khác A và B). Kẻ hai tiếp tuyến Ax và By với nửa đờng tròn. Qua M kẻ tiếp tuyến thứ ba cắt hai tiếp tuyến Ax và By tại C và D.

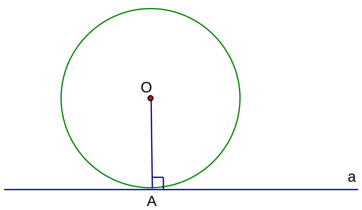
Chứng minh rằng: ΔCOD vuông .a) Chứng minh rằng: AC. BD = R^2 .

b) Gọi E là giao điểm của OC và AMF là giao của OD và BM. Chứng minh rằng: EF = R

c) Tìm vị trí M để S_{ABCD} đạt giá trị bé nhất.

Chủ đề 3. ĐƯỜNG TRÒN

I.TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN



1. ĐỊNH NGHĨA:

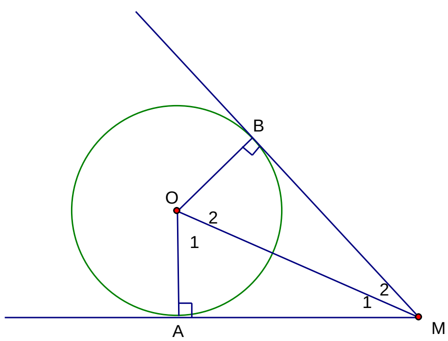
Đờng thẳng a gọi là ***tiếp tuyến*** của (O)

Điểm C gọi là ***tiếp điểm .***

OA$\perp$a và OA = R.

2. TÍNH CHẤT:

T/C 1:Đờng thẳng a gọi là ***tiếp tuyến*** của (O)



$\Rightarrow$OC$\perp$a và OH = R.

T/C 2: MA , MB là hai tiếp tuyến cắt nhau tại M

B, A là hai tiếp điểm

$\Rightarrow$ a/ MA=MB

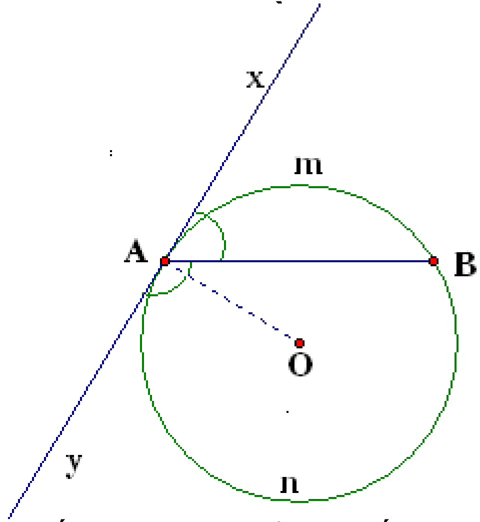
$b/ M_1 = M_2$

$c/ \hat{O}_1 = \hat{O}_2$

CÁC CÁCH CHỨNG MINH

* Cách 1: (theo định nghĩa) OC$\perp$a và OH = R.$\Rightarrow$Đờng thẳng a gọi là ***tiếp tuyến*** của (O)

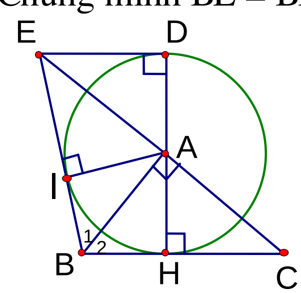
Điểm C gọi là ***tiếp điểm .***



* Cách 2: Đờng thẳng a cắt (O) tại C và OC$\perp$a$\Rightarrow$Đờng thẳng a gọi là ***tiếp tuyến*** của (O)
* Cách 3: (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung)

Cho Dây AB $\in$ (O; R), $BAx = \frac{1}{2}$ *sđ* $AB \Rightarrow$ Ax là tiếp tuyến tại

<u>Ví dụ 1:</u> Cho tam giác ABC vuông ở A, đờng cao AH. Vẽ đờng tròn tâm A bán kính AH. Gọi HD là đờng kính của đờng tròn (A; AH). Tiếp tuyến của đờng tròn tại D cắt CA ở E.
Chứng minh tam giác BEC cân.
Gọi I là hình chiếu của A trên BE, Chứng minh rằng AI = AH.
Chứng minh rằng BE là tiếp tuyến của đờng tròn (A; AH).
Chứng minh BE = BH + DE.



<u>Lời giải:</u> (HD)

Δ AHC = ΔADE (g.c.g) => ED = HC (1) và AE = AC (2).
Vì AB $\perp$CE (gt), do đó AB vừa là đờng cao vừa là đờng trung tuyến của ΔBEC => BEC là tam giác cân. => $B_1 = \angle B_2$

2. Hai tam giác vuông ABI và ABH có cạnh huyền AB chung, $\angle B_1 = \angle B_2$ => Δ AHB = ΔAIB => AI = AH.

3. AI = AH và BE $\perp$ AI tại I => BE là tiếp tuyến của (A; AH) tại I.

4. DE = IE và BI = BH => BE = BI+IE = BH + ED

<u>Ví dụ 2:</u> Cho tam giác cân ABC (AB = AC), I là tâm đờng tròn nội tiếp, K là tâm đờng tròn bàng tiếp góc A , O là trung điểm của IK.
Chứng minh B, C, I, K cùng nằm trên một đờng tròn.
Chứng minh AC là tiếp tuyến của đờng tròn (O).
Tính bán kính đờng tròn (O) Biết AB = AC = 20 Cm, BC = 24 Cm.

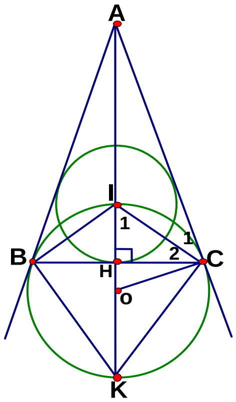
<u>Lời giải:</u> (HD)

1. Vì I là tâm đờng tròn nội tiếp, K là tâm đờng tròn bàng tiếp góc A nên BI và BK là hai tia phân giác của hai góc kề bù đỉnh B
Do đó BI $\perp$ BK hay$\angle$IBK = 90^0 .

Tương tự ta cũng có $\angle ICK = 90^0$ nh vậy B và C cùng nằm trên đường tròn đường kính IK do đó B, C, I, K cùng nằm trên một đường tròn.

Ta có $\angle C_1 = \angle C_2$ (1) (vì CI là phân giác của góc ACH.

$\angle C_2 + \angle I_1 = 90^0$ (2) (vì $\angle IHC = 90^0$).



$\angle I_1 = \angle$ ICO (3) (vì tam giác OIC cân tại O)

Từ (1), (2) , (3) => $\angle C_1 + \angle ICO = 90^0$ hay AC $\perp$ OC. Vậy AC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Từ giả thiết AB = AC = 20 Cm, BC = 24 Cm => CH = 12 cm.

$AH^2 = AC^2 - HC^2 \Rightarrow AH = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16$ (cm)

$CH^2 = AH.OH \Rightarrow OH = \frac{CH^2}{AH} = \frac{12^2}{16} = 9$ (cm)

$OC = \sqrt{OH^2 + HC^2} = \sqrt{9^2 + 12^2} = \sqrt{225} = 15$ (cm)

BÀI TẬP:

<u>Bài 1 :</u> Cho (O ; R) có hai đường kính AB , CD vuông góc nhau , trên đoạn OA lấy M tùy ý tia CM cắt (O) tại N . Đường thẳng vuông góc AB tại M cắt tiếp tuyến tại N của (O) ở P

a) Chứng minh : Tứ giác OMNP nội tiếp

b) Chứng minh : CM . CN $= 2R^2$

c) Chứng minh : Tứ giác CMPO là hình bình hành

<u>Bài 2</u>

Cho đờng tròn tâm O đờng kính AB và điểm M bất kì trên nửa đờng tròn sao cho AM < MB. Gọi M’ là điểm đối xứng của M qua AB và S là giao điểm của hai tia BM, M’A. Gọi P là chân đờng vuông góc từ S đến AB.

1. Gọi S’ là giao điểm của MA và SP. Chứng minh rằng Δ PS’M cân. 2.Chứng minh PM là tiếp tuyến của đờng tròn .

3. PM là tiếp tuyến của đờng tròn tại M

II. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN

* Các vị trí tương đối của hai đường tròn:

<u>Ví dụ 1.</u>

Cho đờng tròn (O) đờng kính AC. Trên bán kính OC lấy điểm B tuỳ ý (B khác O, C). Gọi M là trung điểm của đoạn AB. Qua M kẻ dây cung DE vuông góc với AB. Nối CD, Kẻ BI vuông góc với CD.

Chứng minh tứ giác BMDI nội tiếp .

Chứng minh tứ giác ADBE là hình thoi.

Chứng minh BI // AD.

Chứng minh I, B, E thẳng hàng.

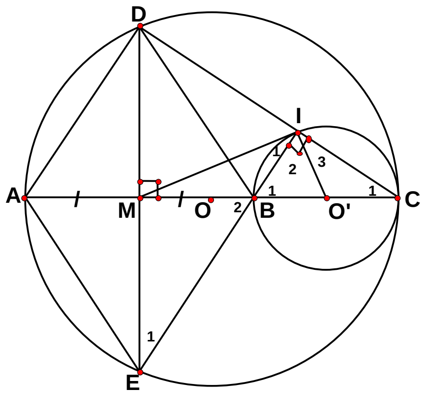
Chứng minh MI là tiếp tuyến của (O’).

Lời giải:

1. $\angle BIC = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đờng tròn) => $\angle BID = 90^0$ (vì là hai góc kề bù); DE $\perp$ AB tại M => $\angle BMD = 90^0$

=> $\angle BID + \angle BMD = 180^0$ mà đây là hai góc đối của tứ giác MBID nên MBID là tứ giác nội tiếp.

2. Theo giả thiết M là trung điểm của AB; DE $\perp$ AB tại M nên M cũng là trung điểm của DE (quan hệ đờng kính và dây cung)



=> Tứ giác ADBE là hình thoi vì có hai đờng chéo vuông góc với nhau tại trung điểm của mỗi đờng .

3. $\angle ADC = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đờng tròn) => AD $\perp$ DC; theo trên BI $\perp$ DC => BI // AD. (1)

4. Theo giả thiết ADBE là hình thoi => EB // AD (2).

Từ (1) và (2) => I, B, E thẳng hàng (vì qua B chỉ có một đờng thẳng song song với AD mà thôi.)

5. I, B, E thẳng hàng nên tam giác IDE vuông tại I => IM là trung tuyến (vì M là trung điểm của DE) =>MI = ME => ΔMIE cân tại M => $\angle I_1 = \angle E_1$; ΔO'IC cân tại O' (vì O'C và O'I cùng là bán kính) => $\angle I_3 = \angle C_1$ mà $\angle C_1 = \angle E_1$ (Cùng phụ với góc EDC) => $\angle I_1 = \angle I_3$ => $\angle I_1 + \angle I_2 = \angle I_3 + \angle I_2$. Mà $\angle I_3 + \angle I_2 = \angle BIC = 90^0$ => $\angle I_1 + \angle I_2 = 90^0 = \angle MIO'$ hay MI $\perp$ O'I tại I => MI là tiếp tuyến của (O').

<u>Ví dụ 2.</u> Cho đờng tròn (O) đờng kính BC, dấy AD vuông góc với BC tại H. Gọi E, F theo thứ tự là chân các đờng vuông góc kẻ từ H đến AB, AC. Gọi (I), (K) theo thứ tự là các đờng tròn ngoại tiếp tam giác HBE, HCF.

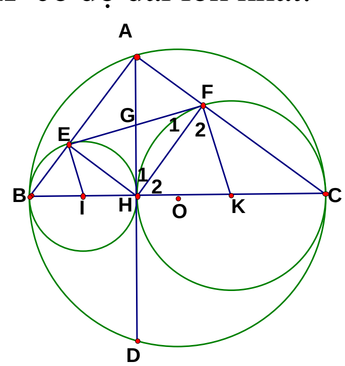
Hãy xác định vị trí tơng đối của các đờng tròn (I) và (O); (K) và (O); (I) và (K).

Tứ giác AEHF là hình gì? Vì sao?.

Chứng minh AE. AB = AF. AC.

Chứng minh EF là tiếp tuyến chung của hai đờng tròn (I) và (K).

Xác định vị trí của H để EF có độ dài lớn nhất.



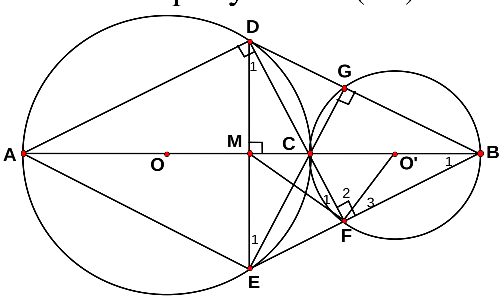
<u>Lời giải:</u>

1.*(HD)* OI = OB – IB => (I) tiếp xúc (O)

OK = OC – KC => (K) tiếp xúc (O)
IK = IH + KH => (I) tiếp xúc (K)
2. Ta có : $\angle BEH = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đờng tròn)
=> $\angle AEH = 90^0$ (vì là hai góc kề bù). (1)
$\angle CFH = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đờng tròn)
=> $\angle AFH = 90^0$ (vì là hai góc kề bù).(2)
$\angle BAC = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đờng tròn hay $\angle EAF = 90^0$ (3)
Từ (1), (2), (3) => tứ giác AFHE là hình chữ nhật (vì có ba góc vuông).
3. Theo giả thiết AD$\perp$BC tại H nên ΔAHB vuông tại H có HE $\perp$ AB ($\angle BEH = 90^0$) => AH^2 = AE.AB (*)
Tam giác AHC vuông tại H có HF $\perp$ AC (theo trên $\angle CFH = 90^0$) => AH^2 = AF.AC (**)
Từ (*) và (**) => AE. AB = AF. AC (= AH^2)
4. Theo chứng minh trên tứ giác AFHE là hình chữ nhật, gọi G là giao điểm của hai đờng chéo AH và EF ta có GF = GH (tính chất đờng chéo hình chữ nhật) => ΔGFH cân tại G => $\angle F_1 = \angle H_1$.
ΔKFH cân tại K (vì có KF và KH cùng là bán kính) => $\angle F_2 = \angle H_2$.
=> $\angle F_1 + \angle F_2 = \angle H_1 + \angle H_2$ mà $\angle H_1 + \angle H_2 = \angle AHC = 90^0$ => $\angle F_1 + \angle F_2 = \angle KFE = 90^0$ => KF $\perp$EF .
Chứng minh tơng tự ta cũng có IE $\perp$ EF. Vậy EF là tiếp tuyến chung của hai đờng tròn (I) và (K).
e) Theo chứng minh trên tứ giác AFHE là hình chữ nhật => EF = AH $\leq$ OA (OA là bán kính đờng tròn (O) có độ dài không đổi) nên EF = OA <=> AH = OA <=> H trùng với O.
Vậy khi H trùng với O túc là dây AD vuông góc với BC tại O thì EF có độ dài lớn nhất.

***BÀI TẬP:**

Bài 1: Cho đờng tròn (O; R) và (O'; R') có R > R' tiếp xúc ngoài nhau tại C. Gọi AC và BC là hai đờng kính đi qua điểm C của (O) và (O'). DE là dây cung của (O) vuông góc với AB tại trung điểm M của AB. Gọi giao điểm thứ hai của DC với (O') là F, BD cắt (O') tại G. Chứng minh rằng:
1. Tứ giác MDGC nội tiếp .2. Bốn điểm M, D, B, F cùng nằm trên một đờng tròn
3. Tứ giác ADBE là hình thoi.
4. B, E, F thẳng hàng
5. DF, EG, AB đồng quy.
6. MF = 1/2 DE.
7. MF là tiếp tuyến của (O').



1. $\angle BGC = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đờng tròn)
=> $\angle CGD = 90^0$ (vì là hai góc kề bù)
Theo giả thiết DE $\perp$ AB tại M => $\angle CMD = 90^0$
$\Rightarrow \angle CGD + \angle CMD = 180^0$ mà đây là hai góc đối của tứ giác MCGD nên MCGD là tứ giác nội tiếp

Lời giải:

2. $\angle BFC = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đờng tròn) => $\angle BFD = 90^0$; $\angle BMD = 90^0$ (vì DE ⊥ AB tại M) nh vậy F và M cùng nhìn BD dới một góc bằng 90^0 nên F và M cùng nằm trên đờng tròn đờng kính BD => M, D, B, F cùng nằm trên một đờng tròn .

3. Theo giả thiết M là trung điểm của AB; DE ⊥ AB tại M nên M cũng là trung điểm của DE (quan hệ đờng kính và dây cung)

=> Tứ giác ADBE là hình thoi vì có hai đờng chéo vuông góc với nhau tại trung điểm của mỗi đờng .

4. $\angle ADC = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đờng tròn) => AD ⊥ DF ; theo trên tứ giác ADBE là hình thoi

=> BE // AD mà AD ⊥ DF nên suy ra BE ⊥ DF .

Theo trên $\angle BFC = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đờng tròn) => BF ⊥ DF mà qua B chỉ có một đờng thẳng vuông góc với DF do đo B, E, F thẳng hàng.

5. Theo trên DF ⊥ BE; BM ⊥ DE mà DF và BM cắt nhau tại C nên C là trực tâm của tam giác BDE

=> EC cũng là đờng cao => EC⊥BD; theo trên CG⊥BD => E,C,G thẳng hàng. Vậy DF, EG, AB đồng quy

6. Theo trên DF ⊥ BE => ΔDEF vuông tại F có FM là trung tuyến (vì M là trung điểm của DE) suy ra

MF = 1/2 DE (vì trong tam giác vuông trung tuyến thuộc cạnh huyền bằng nửa cạnh huyền).

7. (HD) theo trên MF = 1/2 DE => MD = MF => ΔMDF cân tại M => $\angle D_1 = \angle F_1$

ΔO'BF cân tại O' (vì O'B và O'F cùng là bán kính) => $\angle F_3 = \angle B_1$ mà $\angle B_1 = \angle D_1$ (Cùng phụ với $\angle DEB$) => $\angle F_1 = \angle F_3$ => $\angle F_1 + \angle F_2 = \angle F_3 + \angle F_2$. Mà $\angle F_3 + \angle F_2 = \angle BFC = 90^0$ => $\angle F_1 + \angle F_2 = 90^0 = \angle MFO'$ hay MF ⊥ O'F tại F => MF là tiếp tuyến của (O**Bài 2.**

Cho tam giác ABC vuông ở A (AB > AC), đờng cao AH. Trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa điển A , Vẽ nửa đờng tròn đờng kính BH cắt AB tại E, Nửa đờng tròn đờng kính HC cắt AC tại F.

Chứng minh AFHE là hình chữ nhật.

BEFC là tứ giác nội tiếp.

AE. AB = AF. AC.

Chứng minh EF là tiếp tuyến chung của hai nửa đờng tròn

Bài 3.

Cho điểm C thuộc đoạn thẳng AB sao cho AC = 10 Cm, CB = 40 Cm. Vẽ về một phía của AB các nửa đờng tròn có đờng kính theo thứ tự là AB, AC, CB và có tâm theo thứ tự là O, I, K. Đờng vuông góc với AB tại C cắt nửa đờng tròn (O) tại E. Gọi M. N theo thứ tự là giao điểm của EA, EB với các nửa đờng tròn (I), (K).

1.Chứng minh EC = MN.

2.Ch/minh MN là tiếp tuyến chung của các nửa đ/tròn (I), (K).

3.Tính MN.

4.Tính diện tích hình đợc giới hạn bởi ba nửa đờng tròn

Bài 4.

Cho đờng tròn (O) đờng kính AB. Gọi I là trung điểm của OA . Vẽ đờng tron tâm I đi qua A, trên (I) lấy P bất kì, AP cắt (O) tại Q.

Chứng minh rằng các đờng tròn (I) và (O) tiếp xúc nhau tại A.

2. Chứng minh IP // OQ.

3. Chứng minh rằng AP = PQ.

4. Xác định vị trí của P để tam giác AQB có diện tích lớn nhất.

Bài 5

Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn tâm O . Từ A và B kẻ các tiếp tuyến với đường tròn chúng cắt nhau tại S ; K là một điểm lưu động trên cung nhỏ AC. Trên đoạn BK lấy một điểm H sao cho KH = KC .

a)Chứng minh tứ giác SAOB nội tiếp ; b)Tính góc ASB ; c)Chứng tỏ ΔKHC đều

Bài 6

Cho (O) ; đường kính AB = 4 cm. Lấy điểm C trên (O) sao cho góc CAB = 30° , tia CO cắt (O) tại D . Tính :

a/ Độ dài cung nhỏ BmD

b/ Diện tích hình quạt tròn OBmD

Bài 7

Cho ΔABC có Â = 90° ; AB < AC ; đường cao AH. trên HC lấy điểm D sao cho HD = HB. Kẻ CE ⊥ AD (E ∈ AD). CMR :

a/ Tứ giác AHEC nội tiếp. Xác định tâm O của đường tròn này

b/ AB là tiếp tuyến của (O)

c/ CH là phân giác của AEC

d/ Tính S hình giới hạn bởi các đoạn thẳng CA ; CH và cung nhỏ AH của (O).

Biết AC = 8 cm ; $ACB = 30°$

Bài 8

Cho Δ đều BCD ngoại tiếp (O ;R).Gọi M ; N là các tiếp điểm trên BC ; BD.Tia OB cắt (O) ở I

a) Chứng minh rằng BMON là tứ giác nội tiếp
b) Chứng minh I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác BMON
c) Tính độ dài cung nhỏ MN của (O)
d) Tính diện tích hình giới hạn bởi các đoạn thẳng BM ; BN và cung nhỏ MN nói trên

III. GÓC VÀ ĐƯỜNG TRÒN

1. GÓC Ở TÂM.
2. GÓC NỘI TIẾP.
3. GÓC TẠO BỞI TIA TIẾP TUYẾN VÀ MỘT DÂY.
4. GÓC CÓ ĐỈNH Ở BÊN TRONG,GÓC CÓ ĐỈNH Ở BÊN NGOÀI ĐƯỜNG TRÒN

Vì dụ 1:

Cho đường tròn (O) và một điểm P ở ngoài đường tròn. Kẻ hai tiếp tuyến PA, PB (A; B là tiếp điểm). Từ A vẽ tia song song với PB cắt (O) tại C (C ≠ A). Đoạn PC cắt đường tròn tại điểm thứ hai D. Tia AD cắt PB tại E.

a. Chứng minh ΔEAB ~ ΔEBD.
b. Chứng minh AE là trung tuyến của ΔPAB.

HD: a) ΔEAB ~ ΔEBD (g.g) vì: BEA chung

EAB = EBD (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến…)

$\Rightarrow \frac{EB}{EA} = \frac{ED}{EB} \Rightarrow EB^2 = EA.ED$ (1)

* EPD = PCA (s.l.t) ; EAP = PCA (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến…)

⇒ EPD = EAP ; PEA chung ⇒ ΔEPD ~ ΔEAP (g.g)

$\Rightarrow \frac{EP}{EA} = \frac{ED}{EP} \Rightarrow EP^2 = EA.ED$ (2)Từ 1 & 2 $\Rightarrow EB^2 = EP^2 \Rightarrow EB = EP \Rightarrow$ AE là trung tuyến Δ

Vídụ 2:

Cho đường tròn tâm O, bán kính R, có hai đường kính AB, CD vuông góc với nhau. M là một điểm tuỳ ý thuộc cung nhỏ AC. Nối MB, cắt CD ở N.

a. Chứng minh: tia MD là phân giác của góc AMB.

b. Chứng minh:ΔBOM ~ ΔBNA. Chứng minh: BM.BN không đổi.

c. Chứng minh: tứ giác ONMA nội tiếp. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác ONMA, I di động như thế nào?

HD: a) $AMD = DMB = 45^0$ (chắn cung ¼ đ/tròn)

$\Rightarrow$ MD là tia phân giác AMB

b) Δ OMB cân vì OM = OB = $R_{(O)}$

Δ NAB cân có NO vừa là đ/cao vừa là đường trung tuyến.

$\Rightarrow$Δ OMB ~ Δ NAB

$\Rightarrow \frac{BM}{BA} = \frac{BO}{BN} \Rightarrow$ BM.BN = BO.BA = $2R^2$ không đổi.

c) ONMA nội tiếp đ/tròn đ/k AN. Gọi I là tâm đ/tròn ngoại tiếp

$\Rightarrow$ I cách đều A và O cố định $\Rightarrow$ I thuộc đường trung trực OA

Gọi E và F là trung điểm của AO; AC

Vì M chạy trên cung nhỏ AC nên tập hợp I là đoạn EF

BÀI TẬP

Bài 1

Cho đờng tròn (O) bán kính R có hai đờng kính AB và CD vuông góc với nhau. Trên đoạn thẳng AB lấy điểm M (M khác O). CM cắt (O) tại N. Đờng thẳng vuông góc với AB tại M cắt tiếp tuyến tại N của đờng tròn ở P. Chứng minh :

Tứ giác OMNP nội tiếp.

Tứ giác CMPO là hình bình hành.

CM. CN không phụ thuộc vào vị trí của điểm M.

Khi M di chuyển trên đoạn thẳng AB thì P chạy trên đoạn thẳng cố định nào.**Bài 2**

Trên nửa đường tròn tâm O, đường kính AB = 2R, lấy hai điểm C và D sao cho :sđ$CD = 60^0$ (C $\in$ AD) AD cắt BC tại E .

a/ Tính AEC b/ Từ E kẻ EH $\perp$ AB (H $\in$ AB). Chứng minh tứ giác AHEC nội tiếp đường tròn (I)

c/CMR: CB là tia phân giác của góc HCD .d/Tính S hình viên phân giới hạn bởi cung CD và dây CD theo R .

Bài 3

Cho ΔABC nhọn nội tiếp đường tròn (O), các đường cao BE , CF

Chứng minh tứ giác BFEC nôi tiếp . Xác định tâm I của đường tròn ngoại tiếp tứ giác .

Kẻ tiếp tuyến x'Ax . Chứng minh x'x // EF .

Bài 4

Cho tam giác nhọn ABC có $\angle B = 45^0$. Vẽ đờng tròn đờng kính AC có tâm O, đờng tròn này cắt BA và BC tại D và E.

Chứng minh AE = EB.

2. Gọi H là giao điểm của CD và AE, Chứng minh rằng đờng trung trực của đoạn HE đi qua trung điểm I của BH.

3.Chứng minh OD là tiếp tuyến của đờng tròn ngoại tiếp Δ BDE.

IV. TỨ GIÁC NỘI TIẾP

1. ĐỊNH NGHĨA

Tứ giác ABCD có : 4 đỉnh A , B , C , D $\in$ (O)

$\Leftrightarrow$ Tứ giác ABCD gọi là tứ giác nội tiếp đờng tròn (O)

2. TÍNH CHẤT

Tứ giác ABCD nội tiếp (O) suy ra:

- OA = OB =OC =OD
- $A+C=B+D=180^0$

3. CÁC CÁCH THƯỜNG DÙNG CHỨNG MINH:

Cách 1: OA = OB =OC =OD$\Rightarrow$Tø gi¸c ABCD gäi lµ tø gi¸c néi tiÕp®êng trßn

Cách 2: $A+C=180^0(B+D=180^0)$ $\Rightarrow$Tø gi¸c ABCD gäi lµ tø gi¸c néi tiÕp®êng trßn

Cách 3: $DAC=DBC$; điểm A,B cùng nhìn DC dưới 1góc không đổi $\Rightarrow$Tứ giác ABCD gọi là tứ giác nội tiếpđờng tròn

<u>Ví dụ 1</u>

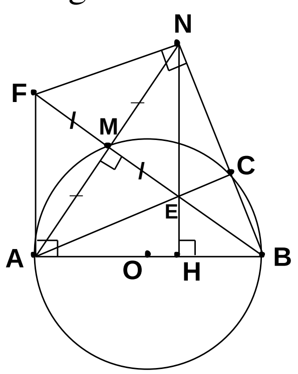
Cho đờng tròn (O) đờng kính AB, điểm M thuộc đờng tròn . Vẽ điểm N đối xứng với A qua M, BN cắt (O) tại C. Gọi E là giao điểm của AC và BM.

Chứng minh tứ giác MNCE nội tiếp .

2. Chứng minh NE $\perp$ AB.

Gọi F là điểm đối xứng với E qua M. Chứng minh FA là tiếp tuyến của (O).

Chứng minh FN là tiếp tuyến của đờng tròn (B; BA).



<u>Lời giải:</u> **1**. ***(HS tự làm)***

2. (HD) Dễ thấy E là trực tâm của tam giác NAB => NE $\perp$ AB.

3.Theo giả thiết A và N đối xứng nhau qua M nên M là trung điểm của AN; F và E xứng nhau qua M nên M là trung điểm của EF => AENF là hình bình hành => FA // NE mà NE $\perp$ AB => FA $\perp$ AB tại A => FA là tiếp tuyến của (O) tại A.

4. Theo trên tứ giác AENF là hình bình hành => FN // AE hay FN // AC mà AC $\perp$ BN => FN $\perp$ BN tại N

ΔBAN có BM là đờng cao đồng thời là đờng trung tuyến (do M là trung điểm của AN) nên ΔBAN cân tại B => BA = BN => BN là bán kính của đờng tròn (B; BA) => FN là tiếp tuyến tại N của (B; BA)

CÁC BÀI TẬP TỔNG HỢP

<u>Bài 1.</u>

Cho ΔABC đều, đường cao AH. Qua A vẽ một đường thẳng về phía ngoài của tam giác, tạo với cạnh AC một góc 40^0. Đường thẳng này cắt cạnh BC kéo dài ở D. Đường tròn tâm O đường kính CD cắt AB ở E. Đường thẳng vuông góc với CD tại G cắt AB ở M.

a. Chứng minh: AHCE nội tiếp được. Xác định tâm I của đường tròn đó.

b. Chứng minh: CA = CM.

c. Đường thẳng HE cắt đường tròn tâm O ở K, đường thẳng HI cắt đường tròn tâm I ở N và cắt đường thẳng DK ở P. Chứng minh: Tứ giác NPKE nội tiếp.

Suy ra vị trí điểm A để tổng (EF + FD + DE) đạt GTLN.

Bài 2.

Cho đường tròn tâm (O; R) có AB là đường kính cố định còn CD là đường kính thay đổi. Gọi (Δ) là tiếp tuyến với đường tròn tại B và AD, AC lần lượt cắt (Δ) tại Q và P.

a. Chứng minh: Tứ giác CPQD nội tiếp được.

b. Chứng minh: Trung tuyến AI của ΔAQP vuông góc với DC.

c. Tìm tập hợp các tâm E của đường tròn ngoại tiếp ΔCPD.

Bài 3.

Cho ΔABC cân (AB = AC; $A < 90^0$), một cung tròn BC nằm bên trong ΔABC tiếp xúc với AB, AC tại B và C. Trên cung BC lấy điểm M rồi hạ các đường vuông góc MI, MH, MK xuống các cạnh tương ứng BC, CA, AB. Gọi Q là giao điểm của MB, IK.

a. Chứng minh: Các tứ giác BIMK, CIMH nội tiếp được.

b. Chứng minh: tia đối của tia MI là phân giác HMK.

c. Chứng minh: Tứ giác MPIQ nội tiếp được $\Rightarrow$ PQ // BC

Bài 4:

Cho nửa đường tròn (O), đường kính AB, C là trung điểm của cung AB; N là trung điểm của BC. Đường thẳng AN cắt nửa đường tròn (O) tại M. Hạ $CI \perp AM$ ($I \in AM$).

a. Chứng minh: Tứ giác CIOA nội tiếp được trong 1 đường tròn.

b. Chứng minh: Tứ giác BMCI là hình bình hành.

c. Chứng minh: $MOI = CAI$.

d. Chứng minh: MA = 3.MB.

Bài 5:

BC là một dây cung của đường tròn (O; R) ($BC \neq 2R$). Điểm A di động trên cung lớn BC sao cho O luôn nằm trong ΔABC. Các đường cao AD; BE; CF đồng quy tại H.

a. Chứng minh:ΔAEF ~ ΔABC.

b. Gọi A’ là trung điểm BC. Chứng minh: AH = 2.A’O.

c. Gọi A_1 là trung điểm EF. Chứng minh: $R.AA_1 = AA'.OA'$.

d. Chứng minh: R.(EF + FD + DE) = $2.S_{ABC}$.

Bài 6

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn đường kính BC cắt AB tại E, cắt AC tại F, CE cắt BF tại K .

a/CM: tứ giác AEKF nội tiếp . b/ BF kéo dài cắt đường tròn (O) tại I .Chứng minh CI = CK

c/ CE kéo dài cắt (O) tại H . Chứng minh IH // EF .

d/ Chứng minh : OA $\perp$ HI

Bài 7

Từ điểm A trên đường tròn (O ; R) đặt liên tiếp 3 điểm A. B, C sao cho sđ cung AB = 90^0 ; sđ cung BC = 30^0. Kẻ AH vuông góc với đường thẳng BC.

a) Chứng minh tứ giác AHBO nội tiếp

b) Chứng minh HA = HC

c) Tính theo R độ dài các đoạn thẳng AB, BH

d) Trên cung lớn AC , lấy điểm D . Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ACD . Khi điểm D chạy trên cung lớn AC thì điểm I chạy trên đường nào .

<u>Bài 8</u>

Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn tâm O . Từ A và B kẻ các tiếp tuyến với đường tròn chúng cắt nhau tại S . K là một điểm lưu động trên cung nhỏ AC. Trên đoạn BK lấy một điểm H sao cho KH = KC .

a)Chứng minh tứ giác SAOB nội tiếp

b)Tính góc ASB

c) Chứng tỏ ΔKHC đều

d) Khi điểm K chạy trên cung nhỏ AC thì điểm H chạy trên đường nào ?